

MÉMOIRE DE MASTER 2 - MATHÉMATIQUES, MODÉLISATION ET SIMULATION

DE

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

soutenu le

19 SEPTEMBRE 2016

Représentations modales pour la diffraction d'ondes électromagnétiques

Justine LABAT

Stage réalisé au sein de l'EPC Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest, LMAP, UMR
CNRS 5142, Université de Pau et des pays de l'Adour

Financé par : INRIA Bordeaux Sud-Ouest

Directeurs : Sébastien TORDEUX et Victor PÉRON

Rapporteurs : Gilles CARBOU et Marc DAMBRINE



Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Motivations	7
1.2	Problème modèle	8
1.3	Principaux résultats	11
1.4	Plan du mémoire	13
2	Quelques éléments d'analyse fonctionnelle	15
2.1	Les espaces de Sobolev	15
2.2	Les espaces de traces	17
2.2.1	Métrique et élément de surface	17
2.2.2	Les espaces de Sobolev de frontière	19
2.2.3	Théorèmes de traces	22
2.3	Décomposition de Helmholtz-Hodge sur une surface riemannienne	24
2.3.1	Premiers nombres de Betti et champs harmoniques	24
2.3.2	Décomposition de l'espace $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$	25
2.3.3	Théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel	26
2.4	Cas particulier de la sphère	27
2.4.1	Métrique, élément de surface et opérateurs différentiels de surface	28
2.4.2	Séparation de variables	28
2.4.3	Décomposition spectrale dans $L^2(\Omega)$	30
2.4.4	Base spectrale de l'espace des champs tangents	31
2.4.5	Décomposition spectrale dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	31
3	Résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions des problèmes de Helmholtz et de Maxwell	33
3.1	Existence, unicité et régularité de la solution du problème de Helmholtz	33
3.1.1	Fonction de Green de l'équation de Helmholtz	33
3.1.2	Existence et unicité de la solution du problème extérieur	36
3.1.3	Unicité de la solution pour des nombres d'onde réels	38
3.1.4	Existence de solutions pour des nombres d'onde réels	39
3.1.5	Régularité des solutions	41
3.2	Existence, unicité et régularité de la solution du problème de Maxwell	41
3.2.1	Solution fondamentale des équations de Maxwell dans l'espace libre	42
3.2.2	Existence et unicité de la solution dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	45
3.2.3	Existence et unicité de la solution dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$	47
3.2.4	Remarques et compléments pour des nombres d'onde réels	50

4	Lemme d'addition scalaire	53
4.1	Décomposition spectrale des solutions de l'équation de Helmholtz dans des géométries sphériques	53
4.1.1	Séparation de variables	54
4.1.2	Convergence de la série	56
4.2	Énoncé et démonstration du lemme d'addition scalaire	60
4.2.1	Énoncé	60
4.2.2	Démonstration de la relation (4.46)	62
4.2.3	Démonstration de la convergence dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, \mathbf{x} > \mathbf{y} \})$	64
5	Lemme d'addition vectoriel	67
5.1	Décomposition spectrale des solutions des équations de Maxwell dans des géométries sphériques	67
5.1.1	Potentiel de Debye et solutions élémentaires	68
5.1.2	Caractère générateur	70
5.1.3	Convergence de la série	73
5.2	Énoncé et démonstration du lemme d'addition vectoriel	75
5.2.1	Énoncé	76
5.2.2	Identification des coefficients $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$	77
6	Décomposition modale des solutions des équations de Helmholtz et de Maxwell	85
6.1	Décomposition modale des solutions de l'équation de Helmholtz	85
6.1.1	Définition des opérateurs intégraux	85
6.1.2	Représentation intégrale de la solution	86
6.1.3	Décomposition modale de la solution du problème de Helmholtz en domaine extérieur	88
6.2	Décomposition modale des solutions des équations de Maxwell	89
6.2.1	Formules de Stratton-Chu	89
6.2.2	Décomposition modale des solutions du problème uni-obstacle	90
6.2.3	Décomposition modale des solutions du problème multi-obstacles	92
7	Conclusions et perspectives	95
	Appendices	97
A	Théorie spectrale des opérateurs non-bornés	99
A.1	Théorie spectrale des opérateurs bornés auto-adjoints compacts	99
A.2	Théorie spectrale des opérateurs non-bornés auto-adjoints à résolvante compacte	100
A.2.1	Opérateur maximal monotone	100
A.2.2	Théorème spectral	100
A.2.3	Application	102
A.3	Puissances des opérateurs non-bornés auto-adjoints	104
A.3.1	Opérateur défini à partir d'une forme sesquilinéaire	104
A.3.2	Espaces intermédiaires entre espaces de Hilbert	104

B	Théorèmes de régularité	105
B.1	Résultats de densité	105
B.2	Régularité elliptique locale	106
B.3	Résultats de régularité pour les équations de Maxwell	107
C	Compléments sur l'équation de Helmholtz	109
C.1	Caractère bien posé du problème de Dirichlet dans des géométries sphériques	109
C.1.1	À l'intérieur d'une boule	109
C.1.2	À l'extérieur d'une boule	110
C.2	Caractère bien posé du problème de Fourier-Robin dans des géométries sphériques	110
C.2.1	À l'intérieur d'une boule	110
C.2.2	À l'extérieur d'une boule	112

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations

Les problèmes de diffraction d'ondes dont le domaine de propagation dépend d'un petit paramètre ou d'une *perturbation* apparaissent sous différentes coutures en mathématique appliquée. Typiquement, ces problèmes mettent en jeu des géométries dont au moins l'une des dimensions est petite devant la longueur d'onde de l'onde incidente. Numériquement, ce genre de problème engendre une discrétisation du domaine d'autant plus fine que la perturbation est petite, ce qui peut donner lieu à une forte augmentation du coût et du temps de calcul. L'analyse asymptotique de ce type de problème permet souvent de diminuer ces coûts sans recourir à des méthodes de raffinement local de maillage, mais en se ramenant à une famille de problèmes qui ne dépendent plus du petit paramètre. On connaît par exemple les problèmes de couches minces en électromagnétisme [4, 44] qui consistent à étudier la propagation d'ondes à travers un milieu comportant différentes couches, dont une particulièrement fine. On utilise aussi ces techniques pour étudier les problèmes de couche limite, par exemple l'effet de peau [14, 15], phénomène physique bien connu en électromagnétisme, qui se produit lors de la diffraction par des obstacles fortement conducteurs. La figure 1.1 schématise les deux géométries évoquées.

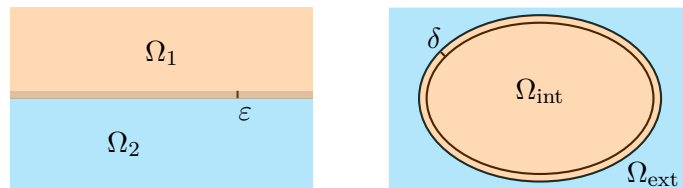


FIGURE 1.1 – Géométrie de couche mince, effet de peau

Leur étude asymptotique consiste à remplacer, lorsque cela est possible, la fine couche par une condition aux limites approchée équivalente. Par exemple, M. Duruflé *et al.* [45] proposent des conditions de transmission équivalentes pour le problème de Maxwell tridimensionnel dans un milieu à couche mince fortement conductrice, à l'aide de la méthode *multi-échelle*. Cette méthode, notamment utilisée dans [52] pour ce type de problème, consiste à approcher la solution du problème en superposant (via une fonction de troncature) deux développements asymptotiques qui constituent des solutions approchées du problème initial à différentes échelles, dans différents domaines. Cette méthode permet d'analyser les modèles ainsi construits et d'en tirer des résultats de convergence (avec une certaine précision). Dans cette problématique, entrent également les problèmes de fentes

minces [51] dont le domaine de propagation des ondes est la réunion d'un volume de dimension n et d'une fente mince de dimension $n - 1$. La figure 1.2 illustre la géométrie de ces problèmes. L'analyse asymptotique des problèmes de fentes consiste à raccorder deux

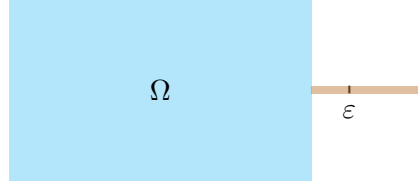


FIGURE 1.2 – Géométrie à fente mince

solutions de modèles approchés, l'un à l'échelle de la fente, de dimension $n - 1$, l'autre à l'échelle du volume, de dimension n . Dans sa thèse [51], S. Tordeux utilise la méthode des *développements asymptotiques raccordés* afin de valider et justifier des modèles de fentes. Cette méthode, notamment développée dans [30, 39], consiste à définir des développements asymptotiques de la solution dans deux domaines « asymptotiques » et à les raccorder dans une zone intermédiaire constituée de points qui peuvent être vus comme proche ou loin de l'obstacle suivant le point de vue adopté. Les deux techniques asymptotiques décrites sont en réalité très proches ; par exemple, M. Dauge *et al.* [19] comparent ces deux méthodes pour l'approximation des solutions du problème de Laplace dans des domaines à coins. Cette singularité géométrique est traitée comme la limite d'un domaine régulier lorsque la perturbation tend vers 0.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la propagation d'ondes électromagnétiques dans un domaine comportant des petits obstacles. Cette problématique a déjà donné lieu à de nombreux travaux, notamment des travaux de H. Ammari *et al.* qui privilégient les approches par des méthodes d'équations intégrales de frontière et par une description équivalente du problème à l'aide des multipôles [3, 5, 6, 7].

Les problèmes de diffraction par de petits obstacles ont été également étudiés dans le cas d'ondes acoustiques ou d'ondes élastiques [3]. En acoustique, en régime temporel ou fréquentiel, nous pouvons citer les travaux de thèse de V. Mattesi [38] qui traite l'analyse asymptotique du problème uni-obstacle bidimensionnel par la méthode des développements asymptotiques raccordés, mais aussi les travaux de A. Bendali *et al.* [9, 10, 11] qui développent une approximation à tout ordre des solutions de l'équation de Helmholtz, à l'aide de modèles *multi-centres*, en deux et récemment, trois dimensions. Historiquement, les modèles multi-centres ont été développés par L. L. Foldy [23], puis par M. Lax [34, 35]. Le modèle de Foldy-Lax, notamment développé pour le problème de diffraction d'ondes acoustiques par de petits obstacles dans [10, 11, 16], consiste à décomposer l'onde diffractée en une somme d'ondes diffractées dans des systèmes isolés en tenant compte des interactions avec les obstacles alentour.

1.2 Problème modèle

Nous nous intéressons à la diffraction d'ondes électromagnétiques ayant une dépendance harmonique en temps par N hétérogénéités bornées dans \mathbb{R}^3 disjointes, soumises à une onde incidente de longueur d'onde $\lambda > 0$. Nous supposons que les N hétérogénéités dépendent d'un paramètre ε vérifiant

$$\varepsilon \ll \lambda, \tag{1.1}$$

dans le sens où chacune des hétérogénéités, notée $\mathcal{O}_\varepsilon^{(j)}$, est incluse dans une boule $\mathcal{B}_\varepsilon^{(j)}$ de centre c_j et de rayon ε , pour tout $j = 1, \dots, N$. De plus, nous supposons que les obstacles sont autosimilaires, c'est-à-dire qu'il sont obtenus par translation et homothétie de formes dites de référence $\widehat{\mathcal{O}}^{(j)}$, ne dépendant pas de ε , tels que pour tout $j = 1, \dots, N$

$$\mathcal{O}_\varepsilon^{(j)} = c_j + \varepsilon \widehat{\mathcal{O}}^{(j)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \frac{\mathbf{x} - c_j}{\varepsilon} \in \widehat{\mathcal{O}}^{(j)} \right\}. \quad (1.2)$$

Pour tout $j = 1, \dots, N$, nous notons $\Gamma_\varepsilon^{(j)}$ la frontière de $\mathcal{O}_\varepsilon^{(j)}$. Le domaine de propagation des ondes est le domaine extérieur Ω_ε défini par

$$\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_\varepsilon^{(j)}} \right). \quad (1.3)$$

Le problème de diffraction en milieu homogène et isotrope est décrit à partir des équations de Maxwell harmoniques en temps

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + (i\omega\epsilon - \sigma)\mathbf{E} = \mathbf{J}, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.4a)$$

$$\quad (1.4b)$$

où $\omega > 0$ désigne la fréquence du rayonnement, les grandeurs caractéristiques du milieu ϵ , μ et σ désignent respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité et le terme source \mathbf{J} désigne une densité de courant. Les grandeurs ϵ , μ et σ sont des fonctions scalaires positives et bornées et nous supposons que \mathbf{J} est à support compact dans le domaine extérieur Ω_ε . Remarquons que des équations de Maxwell (1.4a)-(1.4b) découle une équation du second ordre

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{J}, \quad (1.5)$$

avec $\mathbf{H} = (1/i\omega\mu)\mathbf{rot} \mathbf{E}$, où le nombre d'onde κ est défini par

$$\begin{cases} \kappa^2 = \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) \mu\omega^2, \\ \Im(\kappa) \geq 0. \end{cases} \quad (1.6a)$$

$$\quad (1.6b)$$

Dans le cadre de ce stage, nous émettons les hypothèses suivantes :

- (i) Les grandeurs ϵ et μ caractéristiques du milieu dans lequel les N hétérogénéités sont plongées, sont constantes, respectivement égales à la permittivité du vide ϵ_0 et à la perméabilité du vide μ_0 qui vérifient $(\epsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} = c$ où c désigne la célérité de la lumière ; de plus, la conductivité σ est constante et strictement positive.
- (ii) Les N hétérogénéités sont des conducteurs parfaits, c'est-à-dire la conductivité à l'intérieur de chacune d'elles tend vers $+\infty$: les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H} sont nuls à l'intérieur de chaque obstacle. Dans ce cas, le problème de diffraction est naturellement muni des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_j \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{(j)}, \\ \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{H} = 0, & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{(j)}, \end{cases} \quad (1.7a)$$

$$\quad (1.7b)$$

pour tout $j = 1, \dots, N$, où \mathbf{n}_j désigne le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de $\mathcal{O}_\varepsilon^{(j)}$.

Notons \mathbf{E}^i et \mathbf{H}^i les champs électromagnétiques incidents. Nous supposons que les champs incidents vérifient les équations de Maxwell (1.4a)-(1.4b) en l'absence d'obstacle. Par conséquent, puisque \mathbf{J} est à support compact dans Ω_ε , les champs incidents \mathbf{E}^i et \mathbf{H}^i vérifient les équations de Maxwell homogènes

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}^i - i\omega\mu_0\mathbf{H}^i = 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}^i + (i\omega\epsilon_0 - \sigma)\mathbf{E}^i = 0, \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$(1.8b)$$

dans un domaine borné de \mathbb{R}^3 incluant $\bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_\varepsilon^{(j)}}$. Le champ \mathbf{E} (respectivement \mathbf{H}) se décompose en la somme du champ incident \mathbf{E}^i (respectivement \mathbf{H}^i) et d'un champ diffracté \mathbf{E}^s (respectivement \mathbf{H}^s). Nous imposons la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller sur la partie diffractée des champs

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}| (\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{x}} - i\kappa \mathbf{E}^s) = \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

uniformément dans toutes les directions $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{x} . La figure 1.3 illustre la problématique posée. Cette description du problème admet un cadre

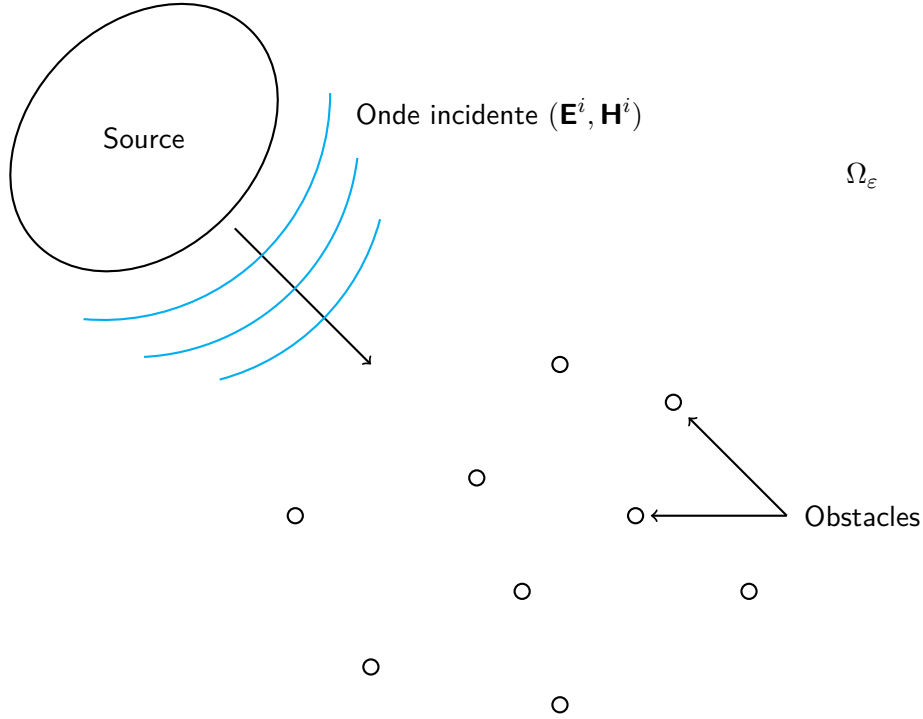


FIGURE 1.3 – Géométrie du problème modèle

théorique bien adapté. Cependant, d'un point de vue numérique, il n'est pas réaliste de considérer un domaine de propagation des ondes non-borné. Pour remédier à ce problème, une méthode classique consiste à borner virtuellement le domaine de propagation des ondes. Il s'agit de considérer une boule \mathcal{B}_ρ de centre $\mathbf{0}$ et de rayon ρ telle que le support du terme source et l'ensemble des obstacles soient contenus dans cette boule. Nous notons $\Omega_{\varepsilon,\rho}$ le domaine borné défini par

$$\Omega_{\varepsilon,\rho} = \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{B}_\rho \quad (1.10)$$

et nous introduisons sur la frontière $\partial\mathcal{B}_\rho$ des *conditions* dites *d'absorption* qui simulent le comportement des solutions en domaine non-borné. Elles s'écrivent

$$\rho \left(\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \frac{\mathbf{x}}{\rho} - i\kappa \mathbf{E}^s \right) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}_\rho. \quad (1.11)$$

Sous les hypothèses (i) et (ii), le problème de diffraction s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Étant donné } (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i) \text{ un champ incident,} \\ \text{chercher } \mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ et } \mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \text{ vérifiant} \\ \quad \mathbf{rot} \mathbf{E}^s - i\omega\mu_0 \mathbf{H}^s = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (1.12a) \\ \quad \mathbf{rot} \mathbf{H}^s + (i\omega\epsilon_0 - \sigma) \mathbf{E}^s = \mathbf{J}, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (1.12b) \\ \quad \mathbf{n}_j \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{(j)}, \quad (1.12c) \\ \quad \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{H} = 0, & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{(j)}, \quad (1.12d) \\ \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}| (\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{x}} - i\kappa \mathbf{E}^s) = \mathbf{0}, & (1.12e) \end{array} \right.$$

avec $j = 1, \dots, N$.

Remarque 1.1. Sous l'hypothèse (i), le nombre d'onde κ admet une partie imaginaire strictement positive. Dans le chapitre 3, nous étudierons l'existence et l'unicité de la solution de ce problème et nous verrons que lorsque $\Im(\kappa) > 0$, la condition de rayonnement à l'infini Silver-Müller n'est plus une condition nécessaire à l'unicité de la solution.

1.3 Principaux résultats

Les résultats d'existence et d'unicité d'une solution au problème extérieur de l'électromagnétisme sont des résultats bien connus pour les nombres d'ondes réels et non-réels. Le cas où le nombre d'onde κ est complexe, et plus précisément vérifie

$$\Im(\kappa) > 0, \quad (1.13)$$

ce qui implique que $\kappa^2 \notin \mathbb{R}^+$, se place dans le cadre de Lax-Milgram [31, section 5.2]. Lorsque le nombre d'onde est réel, le cadre de Lax-Milgram ne suffit plus. Il existe plusieurs manières d'outrepasser cette difficulté, entre autres :

- l'utilisation du principe d'absorption limite [31, section 4.3] qui consiste à ajouter une perturbation complexe $i\delta$ au nombre d'onde réel puis de passer à la limite lorsque δ tend vers 0^+ : le problème perturbé se place dans le cadre de Lax-Milgram,
- l'ajout de la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller et l'utilisation des espaces de Sobolev à poids [42] qui définissent un bon cadre fonctionnel pour les fonctions croissantes à l'infini,
- une approche par la résolution des équations intégrales, proposée par W. Knauff et R. Kress [32], qui consiste à donner une formulation du problème sous forme d'équations intégrales et s'appuie ensuite sur la théorie de Fredholm.

Nous avons choisi de mettre en valeur une approche différente et d'adapter la démonstration due à R. Phillips [50, pp.152-160] pour démontrer l'existence d'une solution au problème extérieur de Maxwell pour un nombre d'onde réel. Elle consiste à traiter le problème extérieur de Maxwell comme une perturbation du problème dans l'espace libre \mathbb{R}^3 et à construire une solution du problème initial comme le raccord (via une fonction de

troncature) de la solution du problème dans l'espace libre et de la solution d'un problème auxiliaire de relèvement de trace tangentielle dans un voisinage de l'obstacle. Cela permet de se ramener à la résolution d'un problème « de source » qui se place dans le cadre de la théorie de Fredholm. Ce problème consiste à déterminer un terme source pour lequel le candidat construit est solution du problème initial. C'est l'objet du paragraphe 3.2.4.

L'une des motivations de ce stage repose sur la décomposition modale des champs électromagnétiques dans un domaine extérieur à N obstacles, dont les coefficients dépendent des traces tangentielles de \mathbf{E}^s et de \mathbf{H}^s sur la frontière que chacun des obstacles. Dans ce dessein, de nombreuses étapes doivent être mises en place. Le premier résultat que nous avons exploité est le *lemme d'addition scalaire*, qui consiste à représenter la solution fondamentale Φ de l'équation scalaire de Helmholtz par une série orthogonale

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})}, \quad (1.14)$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tels que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| > 0$, où $h_n^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel de première espèce d'ordre n , j_n désigne la fonction de Bessel d'ordre n et $Y_{n,m}$ désigne la m -ème fonction harmonique sphérique d'ordre n . Dans le chapitre 4, nous présentons une alternative à la démonstration de D. Colton et R. Kress [17, p.32] et nous donnons des compléments sur la convergence de cette série dans l'espace

$$\mathcal{C}^\infty \left(\left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| \right\} \right). \quad (1.15)$$

Cela s'appuie sur la technique de séparation de variables, la théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami, les théorèmes de régularité elliptique et l'équation vérifiée par la solution fondamentale

$$-\Delta\Phi - 2\kappa^2\Phi = 0, \quad \text{dans } \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| \neq |\mathbf{y}| \right\}. \quad (1.16)$$

Un autre résultat notoire dans l'étude du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par une sphère est le *lemme d'addition vectoriel* qui consiste à représenter la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz vectorielle

$$-\Delta(\Phi\mathbf{p}) - 2\kappa^2(\Phi\mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| \neq |\mathbf{y}| \right\}^3, \quad (1.17)$$

où \mathbf{p} désigne un élément de \mathbb{R}^3 , par une série orthogonale. Dans le chapitre 5, nous étendons ce lemme [17, pp.221-222] aux nombres d'ondes complexes et nous donnons des compléments sur la convergence de cette série dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Le résultat est le suivant : pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tels que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| > 0$,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (1.18) \end{aligned}$$

où $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^x$ désignent les modes singuliers associés au problème extérieur de Maxwell (voir le chapitre 5) et $S_{n,m}$ désigne le mode singulier associé au problème extérieur de Helmholtz (voir le chapitre 4). Enfin, à la manière de P. Monk [40, p.246] ou de R. Kress

[46, p.183], nous déduisons une représentation modale des champs électromagnétiques diffractés \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par N obstacles. Elle est valable hors d'un voisinage de la frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$ de l'union des obstacles. Cette décomposition n'est généralement pas explicitée dans la littérature, elle s'écrit :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \Psi_{n,m}^{(1),j} \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - c_j) + \Psi_{n,m}^{(2),j} \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - c_j) \right\} \right\}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ -\Psi_{n,m}^{(2),j} \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - c_j) + \Psi_{n,m}^{(1),j} \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - c_j) \right\} \right\}, \quad (1.20)$$

où c_j désigne le centre du j -ème obstacle et $\Psi_{n,m}^{(1),j}$ et $\Psi_{n,m}^{(2),j}$ désignent les coefficients associés aux modes de la décomposition. Ils dépendent des traces tangentielles de \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s sur la frontière Γ_j (voir le chapitre 6). La démonstration s'appuie sur les résultats précédents ainsi que sur les formules de Stratton-Chu en domaine extérieur que nous explicitons dans la section 6.2.1. Dans ce mémoire, nous considérons en permanence des géométries régulières. Toutefois, il est possible d'étendre ces résultats lorsque la surface Γ est seulement lipschitzienne au moyen de l'extension des formules de Stratton-Chu à des géométries lipschitziennes [40].

1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire se présente comme suit : dans le deuxième chapitre, nous réunissons les éléments d'analyse fonctionnelle qui se rapportent à l'étude des équations de Maxwell. Nous rappelons la définition des espaces de Sobolev et présentons une méthode qui permet de définir de manière intrinsèque les espaces de Sobolev de frontière. Cette méthode s'appuie sur la théorie spectrale des opérateurs non-bornés auto-adjoints à résolvante compacte et sur la théorie d'interpolation (cf. annexe A). Nous nous intéressons également à la décomposition de Helmholtz-Hodge de champs de vecteurs tangents à une surface et nous approfondissons le cas où cette surface est une sphère.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problèmes extérieurs de Helmholtz et de Maxwell. L'intérêt de mêler le problème de Helmholtz à ce mémoire réside dans le rôle essentiel que joue la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans la détermination de la décomposition modale des solutions des équations de Maxwell.

Dans les quatrième et cinquième chapitres, nous déterminons une décomposition spectrale des solutions des équations de Helmholtz et de Maxwell dans des géométries sphériques (à l'intérieur d'une boule, à l'extérieur d'une boule et dans une couronne). Tous deux contiennent également un lemme technique qui consiste à représenter la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz par une série orthogonale dans l'espace des fonctions infiniment différentiables dans un sous-espace de \mathbb{R}^3 .

Enfin, dans le dernier chapitre, nous déterminons une décomposition modale des solutions des problèmes extérieurs de Helmholtz et de Maxwell. Nous présentons également une méthode de décomposition multi-centre pour le problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par N obstacles.

Chapitre 2

Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

2.1 Les espaces de Sobolev

Dans toute la suite, Ω désigne un *domaine* (ouvert connexe non-vidé) de \mathbb{R}^3 (borné ou non-borné), simplement connexe, de frontière Γ infiniment différentiable tel que Ω soit situé d'un seul côté de Γ . Notons \mathbf{n} le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de Ω . Nous supposons que $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ est non-vidé. Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ des fonctions k -fois continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|, \quad (2.1)$$

où pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de \mathbb{N}^3 , nous notons $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}. \quad (2.2)$$

L'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions infiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$ est défini par

$$\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}). \quad (2.3)$$

Pour $\mathcal{O} = \Omega$ ou \mathbb{R}^3 , nous notons $\mathcal{C}_c^k(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions k -fois continûment différentiables à support compact dans \mathcal{O} et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ l'espace de Fréchet des fonctions infiniment différentiables à support compact dans \mathcal{O} . L'espace $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ des distributions sur \mathcal{O} , est l'ensemble des formes linéaires et continues sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$. Le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}}$. Nous notons en caractère gras les espaces de fonctions ou distributions vectorielles $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}) = (\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}))^3$ et $\mathcal{D}'(\mathcal{O}) = (\mathcal{D}'(\mathcal{O}))^3$. L'espace $L^2(\mathcal{O})$ des fonctions mesurables de carré intégrable sur \mathcal{O} est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{0,\mathcal{O}} = \left(\int_{\mathcal{O}} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

où $d\mathbf{x}$ désigne la mesure de Lebesgue. Pour $m \in \mathbb{N}$, nous définissons l'espace de Sobolev d'ordre m par

$$H^m(\mathcal{O}) = \left\{ u \in L^2(\mathcal{O}), \partial^\alpha u \in L^2(\mathcal{O}), \forall |\alpha| \leq m \right\}, \quad (2.5)$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme du graphe, notée $\|\cdot\|_{m,\mathcal{O}}$, définie par

$$\|u\|_{m,\mathcal{O}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{0,\mathcal{O}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous définissons l'espace $H_0^m(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{m,\Omega}$. L'espace dual de $H_0^m(\Omega)$ est noté $H^{-m}(\Omega)$ et le produit de dualité entre ces espaces est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$.

Pour $\mathcal{O} = \Omega$ ou \mathbb{R}^3 , nous notons $L_{\text{loc}}^2(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions de carré localement intégrable dans \mathcal{O} et pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons $H_{\text{loc}}^m(\mathcal{O})$ l'espace localement de Sobolev d'ordre m sur \mathcal{O} défini par

$$H_{\text{loc}}^m(\mathcal{O}) = \left\{ u \in H^m(\mathcal{B}(\mathbf{x}, \rho)), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \forall \rho > 0 \text{ tels que } \overline{\mathcal{B}(\mathbf{x}, \rho)} \subset \mathcal{O} \right\}, \quad (2.7)$$

où $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \rho)$ désigne la boule ouverte de centre \mathbf{x} et de rayon ρ . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons en caractère gras les espaces de Sobolev vectoriels $\mathbf{H}^m(\mathcal{O}) = (H^m(\mathcal{O}))^3$ et $\mathbf{H}_{\text{loc}}^m(\mathcal{O}) = (H_{\text{loc}}^m(\mathcal{O}))^3$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous introduisons les sous-espaces de $\mathbf{H}^m(\mathcal{O})$, notés $\mathbf{H}^m(\text{div}, \mathcal{O})$ et $\mathbf{H}^m(\text{rot}, \mathcal{O})$, définis par

$$\mathbf{H}^m(\text{div}, \mathcal{O}) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\mathcal{O}), \text{div } \mathbf{u} \in H^m(\mathcal{O}) \}, \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{H}^m(\text{rot}, \mathcal{O}) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\mathcal{O}), \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\mathcal{O}) \}, \quad (2.8b)$$

munis respectivement des normes du graphe

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\text{div}, \mathcal{O})} = \left(\|\mathbf{u}\|_{m,\mathcal{O}}^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{m,\mathcal{O}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9a)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\text{rot}, \mathcal{O})} = \left(\|\mathbf{u}\|_{m,\mathcal{O}}^2 + \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{m,\mathcal{O}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9b)$$

Par convention, nous notons $\mathbf{H}(\text{div}, \mathcal{O}) = \mathbf{H}^0(\text{div}, \mathcal{O})$ et $\mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{O}) = \mathbf{H}^0(\text{rot}, \mathcal{O})$. Enfin, nous définissons l'espace $\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}$. Pour terminer cette section, nous énonçons deux théorèmes qui caractérisent l'injection des espaces de Sobolev dans les espaces de fonctions continues (voir [37, corollaire 9.1] par exemple).

Théorème 2.1. *Supposons de plus que Ω est borné. Pour tous m et $k \in \mathbb{N}$, si $m > k + \frac{3}{2}$ alors*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}). \quad (2.10)$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espace $H^{k+2}(\Omega)$ s'injecte de façon continue dans $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.

Corollaire 2.2. *Soit $\mathcal{O} = \Omega$ ou \mathbb{R}^3 . Pour tous m et $k \in \mathbb{N}$, si $m > k + \frac{3}{2}$ alors*

$$H_{\text{loc}}^m(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathcal{O}). \quad (2.11)$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espace $H_{\text{loc}}^{k+2}(\mathcal{O})$ s'injecte de façon continue dans $\mathcal{C}^k(\mathcal{O})$.

Démonstration. Si $u \in H_{\text{loc}}^m(\mathcal{O})$ alors pour tout compact K tel que son ouverture soit incluse dans \mathcal{O} , u appartient à $\mathcal{C}^k(K)$ d'après le théorème d'injection 2.1, donc $u \in \mathcal{C}^k(\mathcal{O})$. \square

2.2 Les espaces de traces

Dans cette section, nous construisons les espaces de Sobolev de frontière $H^s(\Gamma)$ dans le cas où Γ est une surface compacte et régulière de \mathbb{R}^3 . Pour cela, nous nous appuyons sur quatre livres [21, 29, 37, 47].

2.2.1 Métrique et élément de surface

La frontière Γ de Ω est une surface compacte de \mathbb{R}^3 de classe \mathcal{C}^∞ . Soit \mathbf{x}_0 un élément de Γ . Nous considérons une carte locale (U, V, φ) représentant Γ au voisinage de \mathbf{x}_0 , où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , V est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant \mathbf{x}_0 et $\varphi : U \rightarrow V$ une application de classe \mathcal{C}^∞ vérifie

- (i) φ est un homéomorphisme de U dans $V \cap \Gamma$,
- (ii) si (z_1, z_2) désigne un système de coordonnées dans U alors pour tout $\mathbf{z} \in U$, la famille $(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(\mathbf{z}), \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(\mathbf{z}))$ est une famille libre.

La figure 2.1 illustre la notion de carte locale. Soit $\mathbf{z}_0 \in U$ tel que $\varphi(\mathbf{z}_0) = \mathbf{x}_0$. Le plan

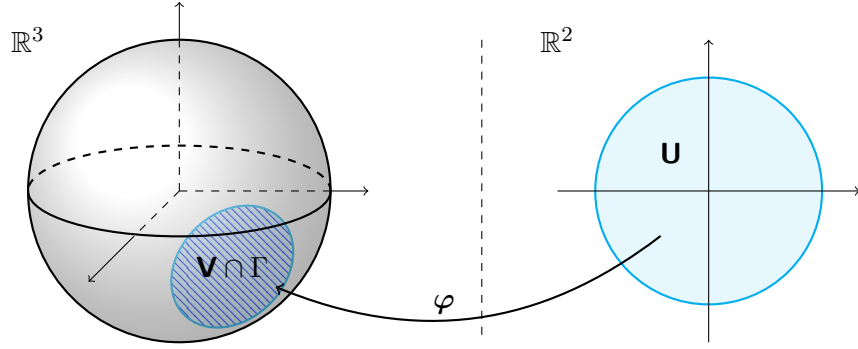


FIGURE 2.1 – Carte locale

tangent à Γ en \mathbf{x}_0 , noté $T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$, est l'espace vectoriel engendré par la famille $(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(\mathbf{z}_0), \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(\mathbf{z}_0))$. Supposons que cette famille est directe (de la même orientation que la base canonique).

La métrique riemannienne g et le gradient tangentiel ∇_Γ

Nous munissons Γ de la métrique induite par le produit scalaire (\cdot, \cdot) sur \mathbb{R}^3 définie par

$$g_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2), \quad \forall \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in T_{\mathbf{x}}\Gamma, \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.12)$$

La matrice $g(\mathbf{z}_0)$ associée à ce produit scalaire dans la base locale sur $T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$ est donnée par

$$g_{ij}(\mathbf{z}_0) = (\omega_i, \omega_j), \quad (2.13)$$

avec $\omega_k = \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\mathbf{z}_0)$, pour $k = 1, 2$. Nous notons $g^{ij}(\mathbf{z}_0)$ les composantes de son inverse

$$g^{ij}(\mathbf{z}_0) = (g_{ij}(\mathbf{z}_0))^{-1}. \quad (2.14)$$

Définition 2.3. Soit $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur Γ . La fonction u est dite différentiable en \mathbf{x}_0 si $u \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en \mathbf{z}_0 . De plus, si $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\xi} \in T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$ sont tels que $\boldsymbol{\xi} = \varphi'(\mathbf{z}_0) \cdot \boldsymbol{\tau}$, nous posons $du_{\mathbf{x}_0}(\boldsymbol{\xi}) = (u \circ \varphi)'(\mathbf{z}_0) \cdot \boldsymbol{\tau}$. La différentielle $du_{\mathbf{x}_0}$ de u en \mathbf{x}_0 ainsi définie est une application linéaire de $T_{\mathbf{x}_0}\Gamma$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Nous considérons un atlas $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de Γ . Du recouvrement constitué des ouverts V_i de la surface compacte Γ , nous en extrayons un sous-recouvrement fini $(V_i)_{i=1, \dots, p}$. Soit une partition de l'unité $(\theta_i)_{i=1, \dots, p}$ telle que $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(V_i \cap \Gamma)$ et $\theta_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ avec $\sum_{i=1}^p \theta_i(\mathbf{x}) = 1$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$. La fonction u est dite k -fois continûment différentiable sur Γ et nous notons $u \in \mathcal{C}^k(\Gamma)$, si la fonction $(\theta_i u) \circ \varphi_i$ prolongée par 0 en dehors de son support appartient à $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^2)$. Nous posons

$$\mathcal{C}^\infty(\Gamma) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Gamma) \quad (2.15)$$

et $\mathcal{D}'(\Gamma)$ l'espace des distributions sur Γ qui est l'espace dual de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, voir [21, §17]. De plus, nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ le crochet de dualité entre ces espaces et nous notons en caractère gras les espaces de fonctions ou distributions vectorielles $\mathcal{C}^\infty(\Gamma) = (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$ et $\mathcal{D}'(\Gamma) = (\mathcal{D}'(\Gamma))^3$.

Définition 2.4. Soit $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable en \mathbf{x}_0 . Le gradient tangentiel de u en \mathbf{x}_0 , noté $\nabla_\Gamma u(\mathbf{x}_0)$ est l'unique élément de $T_{\mathbf{x}_0} \Gamma$ vérifiant

$$du_{\mathbf{x}_0}(\xi) = g_{\mathbf{x}_0}(\nabla_\Gamma u(\mathbf{x}_0), \xi), \quad \forall \xi \in T_{\mathbf{x}_0} \Gamma. \quad (2.16)$$

En adoptant la convention de sommation de l'indice répété, l'expression du gradient tangentiel dans la base locale (ω_1, ω_2) est donnée par

$$\nabla_\Gamma u(\mathbf{x}_0) = (\nabla_\Gamma u)^i \omega_i, \quad (2.17a)$$

$$\text{avec } (\nabla_\Gamma u)^i = g^{ij}(\mathbf{z}_0) \frac{\partial(u \circ \varphi)}{\partial z_j}(\mathbf{z}_0). \quad (2.17b)$$

Ces définitions sont indépendantes du choix de la carte locale ou de l'atlas.

L'élément de surface ds

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe de $T_{\mathbf{x}_0} \Gamma$ et notons (e_1^*, e_2^*) sa base duale telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Nous définissons la 2-forme différentielle sur $T_{\mathbf{x}_0} \Gamma$, appelée forme de surface, par

$$\omega_{\mathbf{x}_0} = e_1^* \wedge e_2^*. \quad (2.18)$$

La forme de surface ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. En pratique, cette métrique de surface se calcule à l'aide de la métrique $g_{\mathbf{x}_0}$ par

$$\omega_{\mathbf{x}_0} = \sqrt{\det g(\mathbf{z}_0)} dz_1 \wedge dz_2, \quad (2.19)$$

où (dz_1, dz_2) désigne la base duale de (ω_1, ω_2) .

Définition 2.5. Soit $u : \Gamma \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable sur $\Gamma \cap V$. Nous définissons l'élément de surface sur $\Gamma \cap V$, noté ds , par

$$\int_{\Gamma \cap V} u ds = \int_{\hat{\Gamma} \cap V} u(\mathbf{x}) \omega_{\mathbf{x}}, \quad (2.20)$$

où $\hat{\cdot}$ désigne une sous-variété bien orientée. De plus, nous avons

$$\int_{\Gamma \cap V} u ds = \int_U u(\varphi(\mathbf{z})) \sqrt{\det g(\mathbf{z})} dz_1 dz_2. \quad (2.21)$$

Soit $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i=1, \dots, p}$ un atlas fini de la surface Γ et $(\theta_i)_{i=1, \dots, p}$ une partition de l'unité associée aux ouverts $(V_i)_{i=1, \dots, p}$. À présent, il est possible de définir l'intégrale du carré d'une fonction définie sur Γ et nous notons

$$\|u\|_{0,\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} |u|^2 \, ds = \sum_{i=1}^p \int_{\Gamma \cap V_i} \theta_i |u|^2 \, ds. \quad (2.22)$$

2.2.2 Les espaces de Sobolev de frontière

Rappelons que Γ désigne une surface compacte de \mathbb{R}^3 infiniment différentiable. L'espace des fonctions mesurables de carré intégrable sur Γ , noté $L^2(\Gamma)$ et défini par

$$L^2(\Gamma) = \{u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \|u\|_{0,\Gamma} < \infty\}, \quad (2.23)$$

est un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$. Nous notons $\mathbf{L}^2(\Gamma) = (L^2(\Gamma))^3$. Nous définissons l'espace de Sobolev d'ordre 1, noté $H^1(\Gamma)$, par

$$H^1(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma), \nabla_{\Gamma} u \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \right\}. \quad (2.24)$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme du graphe

$$\|u\|_{1,\Gamma}^2 = \|u\|_{0,\Gamma}^2 + \|\nabla_{\Gamma} u\|_{0,\Gamma}^2. \quad (2.25)$$

La proposition suivante est une conséquence du théorème A.18.

Proposition 2.6. *L'espace $H^1(\Gamma)$ s'injecte de façon dense et compacte dans $L^2(\Gamma)$.*

Opérateurs différentiels de surface

D'abord, nous définissons les opérateurs différentiels de surface div_{Γ} , \mathbf{rot}_{Γ} et rot_{Γ} , à partir de la définition du gradient tangentiel.

Définition 2.7. *Pour un champ de vecteurs \mathbf{u} de $\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma)$, la divergence surfacique de \mathbf{u} sur Γ , notée $\text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}$, est définie au sens des distributions par*

$$\langle \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}, v \rangle_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{v} \, ds, \quad \forall v \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma). \quad (2.26)$$

Définition 2.8. *Pour une fonction u de $\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma)$, le rotationnel tangentiel de u , noté $\mathbf{rot}_{\Gamma} u$, est défini par*

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} u = \nabla_{\Gamma} u \times \mathbf{n}. \quad (2.27)$$

Définition 2.9. *Pour un champ de vecteurs \mathbf{u} de $\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma)$, le rotationnel surfacique de \mathbf{u} , noté $\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}$, est défini par*

$$\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} = \text{div}_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}). \quad (2.28)$$

Proposition 2.10. *Pour un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma)$, son rotationnel surfacique est donné au sens des distributions par*

$$\langle \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}, v \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{rot}_{\Gamma} v \rangle_{\Gamma}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma). \quad (2.29)$$

Définition 2.11 (Opérateur de Laplace-Beltrami). *Pour une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, l'opérateur de Laplace-Beltrami appliqué à u , noté $\Delta_\Gamma u$ est défini par*

$$\Delta_\Gamma u = \operatorname{div}_\Gamma (\nabla_\Gamma u) = -\operatorname{rot}_\Gamma (\mathbf{rot}_\Gamma u). \quad (2.30)$$

Pour une fonction vectorielle $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel appliqué à \mathbf{u} est défini par

$$\Delta_\Gamma \mathbf{u} = \nabla_\Gamma (\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}) - \mathbf{rot}_\Gamma (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u}). \quad (2.31)$$

Remarque 2.12. D'après la définition de $\operatorname{div}_\Gamma$, l'opérateur de Laplace-Beltrami scalaire peut être défini au sens des distributions par

$$\langle \Delta_\Gamma u, v \rangle_\Gamma = - \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{v} \, ds, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma), \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma). \quad (2.32)$$

Théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami

La suite de ce paragraphe est une application de la théorie spectrale des opérateurs non-bornés auto-adjoints à résolvante compacte présentée dans l'annexe A. Nous cherchons à identifier les espaces de Sobolev de frontière $H^{2s}(\Gamma)$ avec le domaine des puissances de l'opérateur de Laplace-Beltrami $D((-\Delta_\Gamma)^s)$. Considérons la forme antilinéaire symétrique continue et définie positive sur $H^1(\Gamma)$ définie par

$$a(u, v) = \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{v} \, ds + \int_\Gamma u \bar{v} \, ds. \quad (2.33)$$

D'après le paragraphe A.3.1, nous définissons l'opérateur S associé à a , de domaine

$$D(S) = \left\{ u \in H^1(\Gamma), \exists c_u \geq 0, \forall v \in H^1(\Gamma), a(u, v) \leq c_u \|v\|_{0,\Gamma} \right\}, \quad (2.34)$$

vérifiant

$$\int_\Gamma (Su) \bar{v} \, ds = a(u, v), \quad \forall u \in D(S), \forall v \in H^1(\Gamma), \quad (2.35a)$$

$$= \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma u + u) \bar{v} \, ds, \quad \forall u \in D(-\Delta_\Gamma), \forall v \in H^1(\Gamma), \quad (2.35b)$$

car $D(-\Delta_\Gamma) \subset D(S)$. Puisque a est coercive sur $H^1(\Gamma)$, nous pouvons définir la racine carrée de l'opérateur S et d'après le théorème A.16, nous avons

(i) $D(S^{\frac{1}{2}}) = H^1(\Gamma)$,

(ii) pour tous $u, v \in H^1(\Gamma)$, nous avons

$$a(u, v) = \int_\Gamma S^{\frac{1}{2}} u S^{\frac{1}{2}} \bar{v} \, ds. \quad (2.36)$$

Supposons qu'il existe $T : H^1(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ un opérateur linéaire non-borné vérifiant

$$\int_\Gamma T u T \bar{v} \, ds = \int_\Gamma S^{\frac{1}{2}} u S^{\frac{1}{2}} \bar{v} \, ds - \int_\Gamma u \bar{v} \, ds, \quad \forall u, v \in H^1(\Gamma). \quad (2.37)$$

Nous sommes dans les hypothèses de l'application A.2.3 en posant $B = T$ et $A = -\Delta_\Gamma$. Nous déduisons que :

(i) $D(-\Delta_\Gamma)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$,

- (ii) $-\Delta_\Gamma$ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte : d'après le théorème spectral A.12, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Gamma)$ constituée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami associées à une suite croissante de valeurs propres réelles positives $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $-\Delta_\Gamma e_n = \mu_n e_n$ et $\langle e_n, e_p \rangle_{0,\Gamma} = \delta_{np}$.

Remarque 2.13. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\Gamma)$. Par régularité elliptique, puisque $\Delta_\Gamma e_n \in L^2(\Gamma)$, il vient que $e_n \in H^1(\Gamma)$ et pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma e_n \cdot \nabla_\Gamma \overline{e_m} \, ds = - \int_\Gamma \Delta_\Gamma e_n \, \overline{e_m} \, ds = \mu_n \delta_{nm}. \quad (2.38)$$

Conséquences De cette étude, nous tirons les conclusions suivantes :

- (i) T peut être identifié à la racine carrée de l'opérateur de Laplace-Beltrami $(-\Delta_\Gamma)^{\frac{1}{2}}$.
 (ii) Tout élément $u \in L^2(\Gamma)$ peut se décomposer en une série convergente dans $L^2(\Gamma)$ dont les termes sont deux à deux orthogonaux

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n, \quad \text{où } u_n = \langle u, e_n \rangle_{0,\Gamma}. \quad (2.39)$$

- (iii) L'espace $H^1(\Gamma)$ est un espace de Hilbert muni de la norme du graphe associée à T

$$\|u\|_{1,\Gamma}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n) |u_n|^2, \quad (2.40)$$

qui coïncide avec celle définie dans l'équation (2.25).

Interpolation des espaces $H^s(\Gamma)$

Nous définissons la puissance $s \geq 0$ de l'opérateur de Laplace-Beltrami $(-\Delta_\Gamma)^s : D((-\Delta_\Gamma)^s) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ de domaine

$$D((-\Delta_\Gamma)^s) = \left\{ u \in L^2(\Gamma), \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n^{2s}) |u_n|^2 < \infty \right\}. \quad (2.41)$$

vérifiant $(-\Delta_\Gamma)^s e_n = \mu_n^s e_n$ sur Γ . Lorsque $s = m$ un entier naturel, par régularité elliptique, l'espace $D((-\Delta_\Gamma)^m)$ muni de la norme du graphe associée

$$\|u\|_{(-\Delta_\Gamma)^s}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n^{2s}) |u_n|^2 \quad (2.42)$$

coïncide avec $H^{2m}(\Gamma)$ algébriquement et topologiquement. De plus, pour tout réel $s \geq 0$, la théorie d'interpolation permet d'affirmer que

$$H^s(\Gamma) = D((-\Delta_\Gamma)^{\frac{s}{2}}). \quad (2.43)$$

Par ailleurs, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base orthogonale de $H^s(\Gamma)$, $s \geq 0$. Pour tout réel $s \geq 0$, l'espace dual de $H^s(\Gamma)$ est identifiable à $H^{-s}(\Gamma)$ qui peut être caractérisé comme le sous-espace de distributions

$$H^{-s}(\Gamma) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Gamma), \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-s} |u_n|^2 < \infty \right\}. \quad (2.44)$$

Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ le produit de dualité entre ces espaces, défini par

$$\langle u, v \rangle_\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n, \quad \forall u \in H^{-s}(\Gamma), \forall v \in H^s(\Gamma). \quad (2.45)$$

Enfin, pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous notons $\mathbf{H}^s(\Gamma) = (H^s(\Gamma))^3$.

2.2.3 Théorèmes de traces

Définition 2.14. Soient u une fonction scalaire de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et \mathbf{u} une fonction vectorielle de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Nous définissons la trace γ d'une fonction scalaire ou vectorielle par

$$\gamma u = u|_\Gamma, \quad \gamma \mathbf{u} = \mathbf{u}|_\Gamma, \quad (2.46)$$

les traces normale γ_n et tangentielle γ_t d'une fonction vectorielle par

$$\gamma_n \mathbf{u} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_\Gamma, \quad \gamma_t \mathbf{u} = \gamma \mathbf{u} - (\gamma_n \mathbf{u}) \mathbf{n}. \quad (2.47)$$

Dans la littérature, nous retrouvons l'opérateur trace γ_\times , également appelé trace tangentielle, défini par

$$\gamma_\times \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u})|_\Gamma. \quad (2.48)$$

De plus, nous avons les identités $\gamma_t \mathbf{u} = (\gamma_\times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}$ et $\gamma_\times \mathbf{u} = \mathbf{n} \times (\gamma_t \mathbf{u})$.

Remarque 2.15. Les espaces $H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ admettent les caractérisations suivantes [24]

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \gamma_t \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \right\}. \quad (2.50)$$

Nous allons énoncer les théorèmes de traces classiques. Nous renvoyons le lecteur à [43] qui traite ces théorèmes de traces dans les espaces de formes différentielles, ou plus classiquement, à [1, 37]. Grâce à un résultat de densité (cf. Théorème (B.3)), l'opérateur γ peut-être étendu de manière unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Plus généralement, γ envoie $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, pour tout réel $s > \frac{1}{2}$.

Théorème 2.16. L'opérateur trace γ_n peut être étendu en un opérateur linéaire continu et surjectif de $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. De plus, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$, nous avons la formule de Green

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \mathbf{u} + v \operatorname{div} \mathbf{u}) = \langle \gamma_n \mathbf{u}, v \rangle_\Gamma. \quad (2.51)$$

Corollaire 2.17. L'opérateur $u \mapsto (\mathbf{n} \cdot \nabla u)|_\Gamma$ peut être étendu en un opérateur linéaire continu et surjectif de $\{u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. De plus, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, nous avons la formule de Green

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) = \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u, v \rangle_\Gamma. \quad (2.52)$$

Théorème 2.18. L'opérateur trace γ_\times peut-être étendu en un opérateur linéaire et continu de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. De plus, pour tous $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, nous avons la formule de Green

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}) = \langle \gamma_\times \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma. \quad (2.53)$$

Cet opérateur n'est pas surjectif de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ car l'espace d'arrivée contient des champs non-tangents à la surface Γ . Pour tout réel $s \geq 0$, nous introduisons l'espace des champs de vecteurs de $\mathbf{H}^s(\Gamma)$ tangents à la surface Γ , noté $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$, défini par

$$\mathbf{H}_t^s(\Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma), \gamma_n \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.54)$$

Par convention, nous notons $\mathbf{L}_t^2(\Gamma) = \mathbf{H}_t^0(\Gamma)$. En utilisant des arguments de densité et de dualité, il est possible de démontrer que les opérateurs différentiels tangentiels ∇_Γ et \mathbf{rot}_Γ peuvent être étendus de manière unique en des opérateurs linéaires et continus de $H^{s+1}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ pour tout réel $s \geq 0$, les opérateurs différentiels surfaciques div_Γ et \mathbf{rot}_Γ peuvent être étendus de manière unique en des opérateurs linéaires et continus de $\mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$ pour tout réel $s \geq 0$ et l'opérateur de Laplace-Beltrami peut être étendu en un opérateur linéaire et continu de $H^{s+2}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$. Par ailleurs, pour tout réel $s \geq 0$, nous notons $\mathbf{H}_n^s(\Gamma)$ l'espace des champs de vecteurs $\mathbf{H}^s(\Gamma)$ normaux à Γ , défini par

$$\mathbf{H}_n^s(\Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma), \gamma_t \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.55)$$

Puis pour tout $s \geq 0$, nous définissons l'espace $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$ par dualité :

$$\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-s}(\Gamma), \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_n^s(\Gamma)\}. \quad (2.56)$$

Enfin, nous introduisons les espaces des champs de vecteurs de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tangents à la surface Γ tels que leur rotationnel ou divergence surfacique soit dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \quad (2.57a)$$

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}. \quad (2.57b)$$

Ce sont deux espaces de Hilbert munis respectivement des normes

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 + \|\text{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2, \quad (2.58a)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 + \|\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2. \quad (2.58b)$$

Remarque 2.19. L'espace dual du Hilbert $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ peut être identifié à $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)$ via l'espace pivot $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ [27]. De plus, si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)$ alors $\mathbf{n} \times \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ et réciproquement. L'action $\mathbf{n} \times \cdot$ nous permet de passer d'un espace à l'autre.

Proposition 2.20. *L'opérateur trace γ_\times est surjectif de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$.*

Nous définissons la forme sesquilinéaire

$$\mathcal{B} : \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \times \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (2.59a)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Gamma (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot ((\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{v}}) \times \mathbf{n}) \, ds. \quad (2.59b)$$

Cette forme sesquilinéaire est continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Gamma) \times \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$. Par densité, elle peut être étendue de manière unique en une forme sesquilinéaire continue sur $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)$. Ce prolongement définit par ailleurs un produit de dualité entre les espaces $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)$ que nous notons $\langle \gamma_\times \cdot, \gamma_t \cdot \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)}$ ou $\langle \gamma_\times \cdot, \gamma_t \cdot \rangle_\Gamma$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Théorème 2.21. *L'opérateur trace γ_t peut être étendu en un opérateur linéaire continu et surjectif de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)$. De plus, pour tous \mathbf{u} et \mathbf{v} dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, nous avons la formule de Green*

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}) = \langle \gamma_{\times} \mathbf{u}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma), \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)}. \quad (2.60)$$

2.3 Décomposition de Helmholtz-Hodge sur une surface riemannienne

Tant en électromagnétisme qu'en élastodynamique ou en mécanique des fluides, la décomposition de Helmholtz-Hodge est très souvent utilisée pour découpler le champ de vecteurs inconnu en une somme de potentiels [8]. En électromagnétisme, elle permet de réduire les difficultés du traitement de l'opérateur différentiel $\mathbf{rot} \mathbf{rot}$ apparaissant dans l'équation volumique du second ordre de Maxwell afin de se ramener à la résolution de deux équations de Helmholtz découplées, l'une scalaire, l'autre vectorielle.

En 1858, dans son article *On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion*, Helmholtz introduisit la décomposition d'un champ de vecteurs \mathbf{u} en un champ irrotationnel et un champ solénoïdal

$$\mathbf{u} = \underbrace{\nabla \varphi}_{\text{champ irrotationnel}} + \underbrace{\mathbf{rot} \psi}_{\text{champ solénoïdal}}. \quad (2.61)$$

En 1941, Hodge introduisit la décomposition d'une p -forme différentielle ω sur une variété riemannienne sans bord, compacte, connexe et orientable \mathcal{M} de dimension n . Cette décomposition [28, 53] généralise celle de Helmholtz à toutes les dimensions et pour des géométries plus complexes. Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$. Si \mathbf{d}_{p-1} désigne la différentielle extérieure d'une $(p-1)$ -forme et δ_{p+1} désigne la co-différentielle d'une $(p+1)$ -forme alors

$$\omega = \mathbf{d}_{p-1} \varphi + \delta_{p+1} \psi + \mathbf{h}, \quad (2.62)$$

où \mathbf{h} est une p -forme harmonique sur \mathcal{M} , c'est-à-dire, \mathbf{h} est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{M} et $\Delta_p \mathbf{h} = 0$, où l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_p est défini par

$$\Delta_p = (-1)^{np+n} \mathbf{d}_{p-1} \delta_p + (-1)^{np} \delta_{p+1} \mathbf{d}_p. \quad (2.63)$$

Notons $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$ l'ensemble des p -formes harmoniques définies sur \mathcal{M} quotienté par l'ensemble des constantes. La dimension de l'espace $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$ est un invariant topologique, appelé p -ème nombre de Betti et noté $\beta_p(\mathcal{M})$, cf. [25, annexe] par exemple. Pour des géométries particulières, notamment étudiées par Bochner [12], lorsque $\beta_p(\mathcal{M}) = 0$, il suit que l'ensemble $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$ est restreint au singleton $\{\mathbf{0}\}$. En vue d'user de la théorie du potentiel pour les équations de Maxwell, nous nous intéresserons particulièrement à la décomposition d'une 1-forme différentielle sur une surface de \mathbb{R}^3 correspondant couramment (en calcul vectoriel) à un champ de vecteurs défini dans un sous-espace de dimension deux de \mathbb{R}^3 .

2.3.1 Premiers nombres de Betti et champs harmoniques

Soit \mathcal{M} une variété riemannienne compacte et orientable de dimension trois de \mathbb{R}^3 , munie d'une métrique définie positive. Notons $\partial \mathcal{M}$ sa frontière ; c'est une surface compacte

sans bord de \mathbb{R}^3 . En termes d'interprétation, le β_0 d'une variété correspond au nombre de composantes connexes de cette variété ; le premier nombre de Betti correspond au nombre de lacets linéairement indépendants non-homotopes à un point que l'on peut définir sur cette variété et le deuxième nombre de Betti correspond au nombre de sous-variétés de dimension deux sans bord, linéairement indépendantes et non-homotopes à un point que l'on peut définir sur cette variété. La figure 2.2 illustre la définition de ces premiers nombres de Betti. La proposition suivante donne un caractère suffisant à ce que le premier nombre

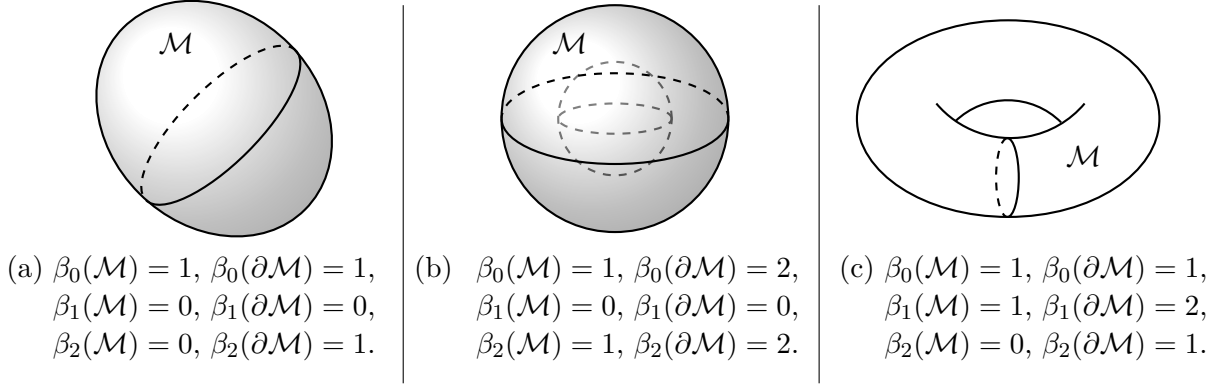


FIGURE 2.2 – (a) Domaine borné simplement connexe sans « trou », (b) Couronne délimitée par deux sphères concentriques, (c) Tore plein

de Betti de la surface $\partial\mathcal{M}$ soit nul. Le groupe de cohomologie $\mathcal{H}_1(\partial\mathcal{M})$ est alors restreint au singleton $\{\mathbf{0}\}$, cf. [21].

Proposition 2.22. *Si \mathcal{M} est simplement connexe alors tout 1-champ harmonique défini sur \mathcal{M} est constant et toute 1-forme harmonique définie sur $\partial\mathcal{M}$ est constante sur chacune des composantes connexes de $\partial\mathcal{M}$.*

En termes de calcul vectoriel, les 1-formes différentielles définies sur $\partial\mathcal{M}$ correspondent aux champs de vecteurs tangents définis sur la surface $\partial\mathcal{M}$ de \mathbb{R}^3 . La différentielle extérieure d'une 0-forme coïncide avec le gradient tangentiel ∇_Γ et la co-différentielle d'une 2-forme coïncide avec le rotationnel tangentiel \mathbf{rot}_Γ .

2.3.2 Décomposition de l'espace $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$

Rappelons que Γ désigne la frontière de classe \mathcal{C}^∞ d'un domaine Ω simplement connexe, situé d'un seul côté de Γ . Le théorème suivant est démontré dans [20] dans le cas particulier où Γ est difféomorphe à une sphère.

Théorème 2.23. *Si $\beta_0(\Gamma) = 1$ et $\beta_1(\Gamma) = 0$ alors*

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \nabla_\Gamma \left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \right) \oplus \mathbf{rot}_\Gamma \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \right). \quad (2.64)$$

Remarque 2.24. Cette décomposition reste valable même si $\beta_0(\Gamma) > 1$ et si nous notons \mathbb{R}^{β_0} l'ensemble des fonctions constantes sur chacune des composantes connexes de Γ , nous avons

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \nabla_\Gamma \left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}^{\beta_0} \right) \oplus \mathbf{rot}_\Gamma \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}^{\beta_0} \right). \quad (2.65)$$

Conséquence Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$, il existe d'uniques potentiels $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}^{\beta_0}$ et $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}^{\beta_0}$ tels que

$$\mathbf{u} = \nabla_\Gamma \varphi + \mathbf{rot}_\Gamma \psi. \quad (2.66)$$

De plus, notant $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ les N composantes connexes de Γ , la norme sur $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ définie dans (2.58a) est équivalente à la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 \sim \sum_{j=1}^N \left\{ \inf_{k_1 \in \mathbb{R}} \|\varphi + k_1\|_{\frac{3}{2}, \Gamma_j}^2 + \inf_{k_2 \in \mathbb{R}} \|\psi + k_2\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_j}^2 \right\}. \quad (2.67)$$

2.3.3 Théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel

Nous considérons la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Gamma)$ constituée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami associées à la suite croissante de valeurs propres positives $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La décomposition de Hodge-Helmholtz nous permet de déterminer une base hilbertienne de $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$, constituée des vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel.

Proposition 2.25. *La famille $(\mathbf{rot}_\Gamma e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \oplus (\nabla_\Gamma e_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ forme une base orthogonale de $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$. De plus, les assertions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\Delta_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma e_n = \mu_n \mathbf{rot}_\Gamma e_n$ et $\Delta_\Gamma \nabla_\Gamma e_n = \mu_n \nabla_\Gamma e_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- (ii) pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\int_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma e_n \cdot \mathbf{rot}_\Gamma \overline{e_m} \, ds = \int_\Gamma \nabla_\Gamma e_n \cdot \nabla_\Gamma e_m \, ds = \mu_n \delta_{nm}, \quad (2.68a)$$

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma e_n \cdot \mathbf{rot}_\Gamma \overline{e_m} \, ds = 0. \quad (2.68b)$$

Par ailleurs, tout $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ peut se décomposer en une série convergente dans $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ dont les termes sont deux à deux orthogonaux

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n^\nabla \nabla_\Gamma e_n + u_n^{\mathbf{rot}} \mathbf{rot}_\Gamma e_n \right), \quad (2.69)$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^\nabla = \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma \overline{e_n} \, ds, \quad u_n^{\mathbf{rot}} = \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}_\Gamma \overline{e_n} \, ds. \quad (2.70)$$

D'autre part, nous avons l'égalité de Parseval

$$\|\mathbf{u}\|_{0, \Gamma}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left(|u_n^\nabla|^2 + |u_n^{\mathbf{rot}}|^2 \right). \quad (2.71)$$

Il est possible de généraliser cette proposition à tous les $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ainsi qu'à l'espace $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Proposition 2.26. *La famille $(\mathbf{rot}_\Gamma e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \oplus (\nabla_\Gamma e_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ forme une base orthogonale de $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ au sens*

$$\mathcal{B}(\mathbf{rot}_\Gamma e_n, \mathbf{rot}_\Gamma e_m) = \mathcal{B}(\nabla_\Gamma e_n, \nabla_\Gamma e_m) = \mu_n \delta_{nm}, \quad (2.72)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{rot}_\Gamma e_n, \nabla_\Gamma e_m) = 0, \quad (2.73)$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, où l'opérateur \mathcal{B} est donné par (2.59a)-(2.59b). De plus, tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ peut se décomposer en une série dont les termes sont deux à deux orthogonaux

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n^\nabla \nabla_\Gamma e_n + u_n^{\text{rot}} \text{rot}_\Gamma e_n \right), \quad (2.74)$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients u_n^∇ et u_n^{rot} sont donnés par

$$u_n^\nabla = \langle \mathbf{u}, \nabla_\Gamma e_n \rangle_\Gamma, \quad u_n^{\text{rot}} = \langle \mathbf{u}, \text{rot}_\Gamma e_n \rangle_\Gamma, \quad (2.75)$$

convergente dans $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ pour la norme équivalente associée

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \mu_n^{\frac{3}{2}} \right) |u_n^\nabla|^2 + \left(1 + \mu_n^{\frac{1}{2}} \right) |u_n^{\text{rot}}|^2 \right\}. \quad (2.76)$$

Remarque 2.27. Une norme équivalente à (2.76) est donnée par (cf. [40, p.244])

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \mu_n^{\frac{1}{2}} |u_n^\nabla|^2 + \mu_n^{-\frac{1}{2}} |u_n^{\text{rot}}|^2 \right\}. \quad (2.77)$$

2.4 Cas particulier de la sphère

Dans cette section, Ω désigne la boule \mathcal{B}_R de centre $\mathbf{0}$ et de rayon $R > 0$

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < R \right\}.$$

Nous introduisons les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un élément $\mathbf{x} \in \Omega$ définies par

$$\mathbf{x} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \quad (2.78)$$

pour $r \in (0, R)$, $\theta \in (0, \pi)$ et $\phi \in (0, 2\pi)$ et la base orthonormale directe $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \end{aligned}$$

Les espaces de Sobolev volumiques tels $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ ou $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ peuvent être explicités en exprimant les opérateurs différentiels ∇ , div et rot en coordonnées sphériques. Pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi, \\ \text{div } \mathbf{u} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}, \\ \text{rot } \mathbf{u} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\phi) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

Le cas particulier de la sphère a été étudié dans [41, section 2.4] par exemple.

2.4.1 Métrique, élément de surface et opérateurs différentiels de surface

Dans toute la suite, la frontière Γ de Ω désigne la sphère \mathcal{S}_R de \mathbb{R}^3 de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R :

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = R \right\}.$$

En chacun des éléments $\mathbf{x} \in \Gamma$, la base locale du plan tangent à Γ est donnée par $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$. Nous déterminons l'expression de la métrique, de l'élément de surface, des opérateurs différentiels de surface. Puisque $\partial \mathbf{x} / \partial \theta = R \mathbf{e}_\theta$ et $\partial \mathbf{x} / \partial \phi = R \sin \theta \mathbf{e}_\phi$, la métrique g_{ij} est donnée par la matrice

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

et son inverse est donné par

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Ainsi, nous déduisons l'expression de l'élément de volume

$$ds = \sqrt{\det g} \, d\theta d\phi = R^2 \sin \theta \, d\theta d\phi, \quad (2.81)$$

Pour une fonction scalaire $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, d'après la définition 2.4, le gradient tangentiel de u sur Γ est donné par

$$\nabla_\Gamma u = (g^{ij}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi. \quad (2.82)$$

Pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ et $\mathbf{u} = (u_\theta, u_\phi) \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, les autres opérateurs différentiels définis sur une surface s'expriment :

$$\mathbf{rot}_\Gamma u = \nabla_\Gamma u \times \mathbf{n} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad (2.83a)$$

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}, \quad (2.83b)$$

$$\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\phi) - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}. \quad (2.83c)$$

Enfin, pour une fonction scalaire $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, nous avons

$$\Delta_\Gamma u = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \quad (2.84)$$

Remarque 2.28. Bien que ces expressions soient singulières, ces fonctions (scalaires ou vectorielles) sont infiniment différentiables lorsque $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$.

2.4.2 Séparation de variables

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans le cas où Γ est une sphère, appelées *fonctions harmoniques sphériques*, définies dans [33, 40, 41, 49] par exemple. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous recherchons les fonctions $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ à variables séparées

$$u_n(\mathbf{x}) = \Theta_n(\theta) \Psi_n(\phi), \quad (2.85)$$

vérifiant le problème aux valeurs propres $-\Delta_\Gamma u_n = (n(n+1)/R^2)u_n$ sur Γ . Ce problème est équivalent à la résolution du problème aux valeurs propres $-\Delta_{\mathcal{S}^2} u_n = n(n+1)u_n$ où $\Delta_{\mathcal{S}^2}$ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami défini sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 . En utilisant l'expression de $\Delta_{\mathcal{S}^2}$ en coordonnées sphériques, puisque u est à variables séparées, les fonctions Θ_n et Ψ_n vérifient respectivement

$$\begin{cases} d_\phi^2 \Psi_n(\phi) + m^2 \Psi_n(\phi) = 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} d_\theta (\sin \theta d_\theta \Theta_n(\theta)) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta_n(\theta) = 0, \end{cases}$$

pour tout $|m| \leq n$; nous notons $\Psi_{n,m}$ et $\Theta_{n,m}$ de telles solutions. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$, la solution $\Psi_{n,m}$ est donnée par $\Psi_{n,m}(\phi) = \exp(im\phi)$. Pour déterminer les solutions $\Theta_{n,m}$, nous recherchons d'abord $\Theta_{n,m}$ sous la forme $\Theta_{n,m}(\theta) = f_{n,m}(\cos \theta)$ de sorte que $f_{n,m}$ satisfasse

$$\sin^2 \theta f_{n,m}''(\cos \theta) - 2 \cos \theta f_{n,m}'(\cos \theta) + \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - n(n+1) \right) f_{n,m}(\cos \theta) = 0. \quad (2.86)$$

En posant $t = \cos \theta$, la fonction $f_{n,m}$ vérifie

$$(1-t^2)f_{n,m}''(t) - 2tf_{n,m}'(t) + \left(\frac{m^2}{1-t^2} - n(n+1) \right) f_{n,m}(t) = 0. \quad (2.87)$$

Cette équation différentielle ordinaire est appelée *équation différentielle de Legendre*.

Définition 2.29. *Le m -ème polynôme de Legendre d'ordre n , noté $P_{n,m}$, est défini par*

$$P_{n,m}(t) = (1-t^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dt} \right)^m P_n(t),$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, où les polynômes P_n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (1-t^2)^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq n$, les polynômes $P_{n,|m|}(\cos \theta)$ sont les solutions de l'équation différentielle (2.87).

Ainsi, les solutions de l'équation $-\Delta_\Gamma u_{n,m} = (n(n+1)/R^2)u_{n,m}$ sont les fonctions de la forme $c_{n,m} P_{n,|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi)$ où les coefficients $c_{n,m}$ sont constants, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $|m| \leq n$. Les fonctions sphériques harmoniques sont les solutions du problème aux valeurs propres de l'équation de Laplace-Beltrami de norme égale à 1.

Théorème 2.30. *Les fonctions harmoniques sphériques*

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_{n,|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi), \quad (2.88)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $|m| \leq n$, forment une base orthonormale de $L^2(\mathcal{S}^2)$, où \mathcal{S}^2 désigne la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

Les fonctions harmoniques sphériques sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^2)$ et forment également une base orthogonale de $H^s(\mathcal{S}^2)$ pour tout réel s .

Corollaire 2.31. Soit $u \in L^2(\mathcal{S}^2)$. Alors u admet la décomposition spectrale suivante :

$$u(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad \text{dans } L^2(\mathcal{S}^2), \quad (2.89)$$

où les coefficients spectraux $u_{n,m}$ sont donnés par

$$u_{n,m} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} u(\theta, \phi) \overline{Y_{n,m}(\theta, \phi)} \sin \theta \, d\theta d\phi. \quad (2.90)$$

Remarque 2.32. Comme la famille $(Y_{n,m})_{n,m}$ est orthogonale dans $L^2(\mathcal{S}^2)$, les coefficients spectraux ainsi définis vérifient

$$|u_{n,m}|^2 \leq \|u\|_{0,\mathcal{S}^2}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n.$$

2.4.3 Décomposition spectrale dans $L^2(\Omega)$

Considérons u une fonction de $L^2(\Omega)$. Pour presque tout $0 < r < R$, u admet une trace $u(r, \cdot, \cdot) \in L^2(\mathcal{S}^2)$. En effet,

$$u \in L^2(\Omega) \iff \int_{r=0}^R \|u(r, \cdot, \cdot)\|_{0,\mathcal{S}^2}^2 r^2 \, dr < \infty, \quad (2.91)$$

$$\implies \|u(r, \cdot, \cdot)\|_{0,\mathcal{S}^2}^2 < \infty, \quad \text{p.p. tout } 0 < r < R. \quad (2.92)$$

Partout où cette trace existe, d'après le corollaire 2.31, nous avons

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(r) Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad \text{dans } L^2(\mathcal{S}^2), \quad (2.93)$$

où les coefficients spectraux $u_{n,m}(r)$ sont donnés par

$$u_{n,m}(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} u(r, \theta, \phi) \overline{Y_{n,m}(\theta, \phi)} \sin \theta \, d\theta d\phi, \quad (2.94)$$

pour presque tout $0 < r < R$. Il suit directement que

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(r) Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (2.95)$$

En effet, pour presque tout $0 < r < R$ et pour $N \in \mathbb{N}$, si nous notons

$$I_N(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left| u(r, \theta, \phi) - \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(r) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right|^2 \sin \theta \, d\theta d\phi,$$

alors d'après l'identité (2.93), la suite (I_N) converge simplement vers 0 pour presque tout $0 < r < R$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. De plus, comme la somme tronquée correspond à une projection orthogonale dans $L^2(\mathcal{S}^2)$, nous avons

$$I_N(r) \leq \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} |u(r, \theta, \phi)|^2 \sin \theta \, d\theta d\phi = \|u(r, \cdot, \cdot)\|_{0,\mathcal{S}^2}^2 \in L_{r^2}^1(0, R), \quad (2.96)$$

d'après l'expression (2.91), où l'espace à poids $L_{r^2}^1(0, R)$ est défini par

$$L_{r^2}^1(0, R) = \left\{ v : (0, R) \longrightarrow \mathbb{C}, \int_0^R |v(r)| r^2 \, dr < \infty \right\}. \quad (2.97)$$

Donc, d'après le théorème de Lebesgue, I_N converge vers 0 dans $L_{r^2}^1(0, R)$ donc la décomposition (2.95) est justifiée.

Remarque 2.33. La suite de fonctions $(u_{n,m}(r) Y_{n,m}(\theta, \phi))_{n,m}$ forme une famille orthogonale de $L^2(\Omega)$.

2.4.4 Base spectrale de l'espace des champs tangents

Compte-tenu du travail effectué dans le paragraphe 2.3.3, nous déterminons une base hilbertienne de l'espace des champs tangents de $\mathbf{L}_t^2(\mathcal{S}^2)$, cf. [40, section 9.3.3].

Corollaire 2.34. *Les fonctions vectorielles harmoniques sphériques*

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \quad (2.98)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m = -n, \dots, n$, forment une base orthonormale de $\mathbf{L}_t^2(\mathcal{S}^2)$.

Les fonctions harmoniques sphériques vectorielles sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^2)$ et forment également une base orthogonale de $\mathbf{H}_t^s(\mathcal{S}^2)$ pour tout réel s .

Proposition 2.35. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)$. Alors \mathbf{u} admet la décomposition spectrale suivante :*

$$\mathbf{u}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ u_{n,m}^{\nabla} \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\theta, \phi) + u_{n,m}^{\mathbf{rot}} \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\}, \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2), \quad (2.99)$$

où les coefficients spectraux $u_{n,m}^{\nabla}$ et $u_{n,m}^{\mathbf{rot}}$ sont donnés par

$$u_{n,m}^{\nabla} = \frac{1}{n(n+1)} \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2), \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)}, \quad (2.100a)$$

$$u_{n,m}^{\mathbf{rot}} = \frac{1}{n(n+1)} \langle \mathbf{u}, \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2), \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)}. \quad (2.100b)$$

Remarque 2.36. Pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)$, sa norme issue de l'interpolation est équivalente à

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)}^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{n(n+1)} \left| u_{n,m}^{\nabla} \right|^2 + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left| u_{n,m}^{\mathbf{rot}} \right|^2 \right\}. \quad (2.101)$$

2.4.5 Décomposition spectrale dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Considérons \mathbf{u} une fonction de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Pour presque tout $0 < r < R$, \mathbf{u} admet une trace tangentielle $\gamma_{\times} \mathbf{u}(r, \cdot, \cdot) \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)$. Partout où cette trace existe, d'après la proposition 2.35, nous avons

$$\gamma_{\times} \mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ u_{n,m}^{\nabla}(r) \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\theta, \phi) + u_{n,m}^{\mathbf{rot}}(r) \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\}, \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2), \quad (2.102)$$

où les coefficients spectraux $u_{n,m}^{\nabla}(r)$ et $u_{n,m}^{\mathbf{rot}}(r)$ sont donnés par

$$u_{n,m}^{\nabla}(r) = \langle \gamma_{\times} \mathbf{u}(r, \cdot, \cdot), \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2), \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)}, \quad (2.103a)$$

$$u_{n,m}^{\mathbf{rot}}(r) = \langle \gamma_{\times} \mathbf{u}(r, \cdot, \cdot), \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2), \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)}. \quad (2.103b)$$

pour presque tout $0 < r < R$.

Chapitre 3

Résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions des problèmes de Helmholtz et de Maxwell

Soit D un domaine borné simplement connexe de frontière Γ infiniment différentiable tel que D soit situé d'un seul côté de Γ . Nous notons Ω le complémentaire de \overline{D} dans \mathbb{R}^3 et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de D . Nous supposons que Ω est connexe. Dans ce chapitre, nous allons établir l'existence et l'unicité d'une solution $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ telle que $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$ au problème extérieur de l'électromagnétisme

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s - i\omega\mu_0\mathbf{H}^s = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega, & (3.1a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}^s + (i\omega\epsilon_0 - \sigma)\mathbf{E}^s = \mathbf{J}, & \text{dans } \Omega, & (3.1b) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}^s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i, & \text{sur } \Gamma, & (3.1c) \end{cases}$$

où les champs incidents \mathbf{E}^i et $\mathbf{H}^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, le terme source $\mathbf{J} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, la fréquence $\omega > 0$ est constante, les grandeurs ϵ_0 et μ_0 sont constantes, respectivement égales à la permittivité et à la perméabilité du vide et la conductivité σ est constante et strictement positive. Nous notons κ le nombre d'onde complexe défini par (1.6a)-(1.6b) et vérifiant

$$\Im(\kappa) > 0. \quad (3.2)$$

Dans la première section, nous rappelons les résultats d'existence et d'unicité de solutions de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre (voir [31] par exemple) puis en domaine extérieur. Dans la seconde section, nous détaillons la démonstration de l'existence et l'unicité de solutions du problème de Maxwell présenté ci-dessus.

3.1 Existence, unicité et régularité de la solution du problème de Helmholtz

3.1.1 Fonction de Green de l'équation de Helmholtz

Considérons l'équation de Helmholtz scalaire dans l'espace libre

$$-\Delta u - \kappa^2 u = f, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (3.3)$$

où $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est à support compact et disjoint de l'origine et $\kappa \in \mathbb{C}$ avec $\Im(\kappa) \geq 0$.

Remarque 3.1. Lorsque κ est réel, ce problème est mal posé car ne donne aucune information sur le comportement à l'infini de la solution recherchée u . En fait, nous perdons l'unicité du problème et nous confrontons à la causalité ou l'anti-causalité de la solution recherchée : le problème est-il direct ou rétrograde ? Il existe plusieurs manières de retrouver la notion de causalité [31] dans l'espace de Sobolev $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, par exemple :

- le principe d'absorption limite qui consiste à ajouter un frottement $i\delta$ au nombre d'onde κ dans l'équation de Helmholtz (3.3) afin d'assurer la coercivité de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème et passer à la limite lorsque $\delta \rightarrow 0^+$,
- ou encore imposer que u vérifie la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}| \left(\frac{\partial u}{\partial |\mathbf{x}|} - i\kappa u \right) \leq \gamma(|\mathbf{x}|), \quad (3.4)$$

avec $\gamma(|\mathbf{x}|) \rightarrow 0$ lorsque $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$.

Si u est une solution de l'équation de Helmholtz définie à l'aide d'une de ces deux manières, nous dirons que la solution est *sortante*.

Dans le cadre de ce stage, nous supposons que l'hypothèse (3.2) est vérifiée.

Proposition 3.2. *Soit $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$. Une solution fondamentale $G_\kappa : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation de Helmholtz*

$$-\Delta G_\kappa - \kappa^2 G_\kappa = \delta_{\mathbf{0}}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (3.5)$$

où $\delta_{\mathbf{0}}$ désigne la masse de Dirac en $\mathbf{0}$, est donnée par

$$G_\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (3.6)$$

Remarque 3.3. Si $\Im(\kappa) > 0$, la fonction G_κ est de classe \mathcal{C}^∞ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et appartient à la classe des fonctions $L^p(\mathbb{R}^3)$ pour tout $p \in [1, 3)$. En effet, la fonction G_κ est exponentiellement décroissante à l'infini (car $\Im(\kappa) > 0$) et admet une singularité d'ordre $1/r$ en $\mathbf{0}$; l'élément de volume étant donné par $r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$, la fonction G_κ est L^p -intégrable si et seulement si $p - 2 < 1$. En outre, son gradient ∇G_κ appartient à la classe des fonctions $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ pour tout $p \in [1, \frac{3}{2})$.

Démonstration de la proposition 3.2. La fonction G_κ est un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ car $G_\kappa \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, calculons $-\Delta G_\kappa - \kappa^2 G_\kappa$ au sens des distributions :

$$\langle -\Delta G_\kappa - \kappa^2 G_\kappa, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|\mathbf{x}| > \varepsilon\}} G_\kappa (\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi) \, d\mathbf{x}.$$

D'après les formules de Green (2.52) et (2.51), notant $\mathbf{n} = -\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle -\Delta G_\kappa - \kappa^2 G_\kappa, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\{|\mathbf{x}| > \varepsilon\}} (\Delta G_\kappa + \kappa^2 G_\kappa) \varphi \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\{|\mathbf{x}| = \varepsilon\}} \{G_\kappa \partial_{\mathbf{n}} \varphi - (\partial_{\mathbf{n}} G_\kappa) \varphi\} \, ds_{\mathbf{x}} \right), \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|\mathbf{x}| = \varepsilon\}} \{(\partial_{\mathbf{n}} G_\kappa) \varphi - G_\kappa \partial_{\mathbf{n}} \varphi\} \, ds_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

car $\Delta G_\kappa + \kappa^2 G_\kappa$ vaut 0 hors de l'origine. Puisque φ est infiniment différentiable, φ admet un développement de Taylor et nous avons

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{0}) + O(|\mathbf{x}|) \quad \text{et} \quad |\nabla \varphi(\mathbf{x})| = O(1) \implies \partial_{\mathbf{n}} \varphi(\mathbf{x}) = O(1), \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow 0.$$

De même, la fonction G_κ vérifie

$$G_\kappa(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{et} \quad \partial_{\mathbf{n}} G_\kappa(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^2} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow 0.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \left\langle -\Delta G_\kappa - \kappa^2 G_\kappa, \varphi \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\{|\mathbf{x}|=\varepsilon\}} \frac{\varphi(\mathbf{0})}{4\pi|\mathbf{x}|^2} \, ds_{\mathbf{x}} - \int_{\{|\mathbf{x}|=\varepsilon\}} O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \, ds_{\mathbf{x}} \right\}, \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\varphi(\mathbf{0})}{4\pi} \sin \theta \, d\theta d\phi, \\ &= \varphi(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

□

Pour $\kappa \in \mathbb{R}^+$, la fonction G_κ est également la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz.

Proposition 3.4. *Une solution u_κ de l'équation de Helmholtz (3.3) est donnée par*

$$u_\kappa = G_\kappa * f, \tag{3.7}$$

où $*$ désigne le produit de convolution au sens des fonctions.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$-\Delta u_\kappa - \kappa^2 u_\kappa = \left(-\Delta G_\kappa - \kappa^2 G_\kappa\right) * f = \delta_{\mathbf{0}} * f = f. \tag{3.8}$$

□

Proposition 3.5. *Lorsque $\Im(\kappa) > 0$, la solution de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre définie par (3.7) appartient à $H^2(\mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. D'après l'inégalité de convolution de Young généralisée,

$$u_\kappa = G_\kappa * f \in L^2(\mathbb{R}^3), \tag{3.9}$$

car $G_\kappa \in L^1(\mathbb{R}^3)$ (remarque (3.3)) et $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. De plus, $\Delta u_\kappa = -\kappa^2 u_\kappa + f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ donc, d'après la proposition B.7, $u_\kappa \in H^2(\mathbb{R}^3)$. □

Proposition 3.6. *Si $\kappa \in \mathbb{R}^*$, la solution de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre définie par (3.7) appartient à $L^6(\mathbb{R}^3) \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. Puisque nous avons

$$|u_\kappa| \leq G_0 * |f|, \tag{3.10}$$

nous allons démontrer que le membre de gauche est dans l'espace souhaité. Remarquons d'abord que puisque $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est à support compact, alors $|f| \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$.

Considérons χ une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de l'origine, 0 dans un voisinage de l'infini et décomposons $G_0 * |f|$ sous la forme

$$G_0 * |f| = \chi G_0 * |f| + (1 - \chi) G_0 * |f|. \quad (3.11)$$

Comme χG_0 appartient à $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $|f|$ à $L^2(\mathbb{R}^3)$, d'après l'inégalité de convolution de Young,

$$\chi G_0 * |f| \in L^6(\mathbb{R}^3). \quad (3.12)$$

De même, puisque $(1 - \chi) G_0$ appartient à $L^6(\mathbb{R}^3)$ et $|f|$ à $L^1(\mathbb{R}^3)$, d'après l'inégalité de convolution de Young,

$$(1 - \chi) G_0 * |f| \in L^6(\mathbb{R}^3). \quad (3.13)$$

Nous déduisons que u_κ appartient à $L^6(\mathbb{R}^3)$, puis, d'après la proposition B.7, $u_\kappa \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. \square

Nous adoptons la définition isométrique de la transformée de Fourier, à savoir, si $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ alors

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \xi) d\mathbf{x}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Proposition 3.7. Si $\Im(\kappa) \neq 0$, la transformée de Fourier de la fonction de Green G_κ est donnée par

$$\hat{G}_\kappa(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (|\xi|^2 - \kappa^2)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (3.14)$$

Démonstration. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (3.5), puisque la transformée de Fourier de la masse de Dirac tridimensionnelle est égale à la fonction constante $1/(2\pi)^{\frac{3}{2}}$, il vient que

$$(|\xi|^2 - \kappa^2) \hat{G}_\kappa(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.15)$$

et nous obtenons l'identité attendue. \square

Remarque 3.8. Le facteur $|\xi|^2 - \kappa^2$ ne s'annule pas lorsque $\kappa \notin \mathbb{R}$. Lorsque $\kappa \in \mathbb{R}$, l'équation (3.15) ne détermine pas \hat{G}_κ . Cette question a été traitée dans [2].

3.1.2 Existence et unicité de la solution du problème extérieur

Rappelons que $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ désigne le domaine extérieur simplement connexe de frontière Γ infiniment différentiable tel que Ω soit situé d'un seul côté de Γ . Considérons l'équation de Helmholtz scalaire dans Ω avec une condition aux limites de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.16a)$$

$$(3.16b)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est à support compact et $\kappa \in \mathbb{C}$ avec $\Im(\kappa) > 0$.

Nous rappelons le théorème de Lax-Milgram [29, p.22] qui permet de démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles.

Théorème 3.9 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit a une forme sesquilinéaire continue sur H . Si a est coercive sur H , i.e.,*

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H,$$

alors pour toute forme antilinéaire $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur H , il existe un unique élément $u \in H$ tel que

$$f(v) = a(u, v), \quad \forall v \in H.$$

Nous définissons la formulation variationnelle associée au problème (3.16a)-(3.16b) qui consiste à chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.17)$$

Proposition 3.10. *Le problème qui consiste à chercher $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant les équations (3.16a)-(3.16b) est équivalent au problème qui consiste à chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant la formulation faible (3.17).*

Démonstration. Première implication. Supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie les équations (3.16a)-(3.16b). Alors nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui converge fortement vers v dans $H_0^1(\Omega)$. En particulier, elle converge faiblement vers v dans $H_0^1(\Omega)$, donc par continuité de la forme sesquilinéaire

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Seconde implication. Supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie la formulation faible (3.17). En particulier,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

car $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est inclus dans $H_0^1(\Omega)$. Cela est équivalent, au sens des distributions, à

$$-\Delta u - \kappa^2 u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

□

Théorème 3.11. *Il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant le problème extérieur de Helmholtz (3.16a).*

Remarque 3.12. La condition aux limites (3.16b) est contenue dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de la formulation faible. Notons a la forme sesquilinéaire sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\mathbf{x}$$

et ℓ la forme antilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x}.$$

La forme sesquilinéaire a est continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, notant θ_{κ} l'argument du nombre complexe $\kappa = |\kappa| \exp(i\theta_{\kappa})$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \left| \exp \left(i \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\kappa} \right) \right) a(u, u) \right|, \\ &\geq \Re \left[\exp \left(i \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\kappa} \right) \right) a(u, u) \right], \\ &\geq \sin \theta_{\kappa} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} - \Re \left[\kappa^2 \exp \left(i \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\kappa} \right) \right) \right] \int_{\Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x}, \\ &\geq \sin \theta_{\kappa} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + |\kappa|^2 \int_{\Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right), \end{aligned}$$

donc, puisque $\theta_{\kappa} \in (0, \pi)$, a est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. \square

3.1.3 Unicité de la solution pour des nombres d'onde réels

Lorsque κ admet une partie imaginaire strictement positive, l'unicité de la solution est donnée par le théorème de Lax-Milgram. Nous présentons une méthode qui permet de démontrer l'unicité de la solution lorsque κ est réel s'appuyant sur le lemme de Rellich, cf. [17].

Lemme 3.13 (Lemme de Rellich). *Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $-\Delta v - \kappa^2 v = 0$ dans Ω vérifiant la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld (3.4) et telle que*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |v|^2 \, ds_{\mathbf{x}} = 0.$$

Alors $v = 0$ dans $\bar{\Omega}$.

Le résultat d'unicité est le suivant :

Proposition 3.14. *Pour $\kappa \in \mathbb{R}^*$, le problème extérieur de Helmholtz (3.16a)-(3.16b) admet au plus une solution sortante.*

Démonstration. Soient u et v sont deux solutions du problème de Helmholtz (3.16a)-(3.16b) vérifiant la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld. Alors $w = u - v$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène $-\Delta w - \kappa^2 w = 0$ dans Ω , la condition aux limites $w = 0$ sur Γ ainsi que la condition de Sommerfeld. Soit $\rho > 0$ tel que $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ soit inclus dans \mathcal{B}_{ρ} la boule ouverte de centre $\mathbf{0}$ et de rayon ρ et notons $\Omega_{\rho} = \Omega \cap \mathcal{B}_{\rho}$. En choisissant w comme fonction-test dans la formulation variationnelle et utilisant la condition aux limites sur Γ , nous avons

$$0 = - \int_{\Omega_{\rho}} (\Delta w + \kappa^2 w) \bar{w} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\rho}} (|\nabla w|^2 - \kappa^2 |w|^2) \, d\mathbf{x} - \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\partial_{\mathbf{n}} w) \bar{w} \, ds_{\mathbf{x}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} |\nabla w|^2 - \kappa^2 |w|^2 &= \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\partial_{\mathbf{n}} w) \bar{w} \, ds_{\mathbf{x}}, \\ &= \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\partial_r w - i\kappa w) \bar{w} \, ds_{\mathbf{x}} + i\kappa \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |w|^2 \, ds_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Nous prenons la partie imaginaire de part et d'autre de l'égalité et comme $\kappa \in \mathbb{R}^*$, nous obtenons

$$\Im \left(\int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\partial_r w - i\kappa w) \bar{w} \, ds_{\mathbf{x}} \right) + \kappa \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |w|^2 \, ds_{\mathbf{x}} = 0,$$

et puisque w vérifie la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous déduisons que

$$\int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |w|^2 \, ds_{\mathbf{x}} = 0, \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow +\infty.$$

D'après le lemme de Rellich, $w = 0$ dans $\bar{\Omega}$ donc $u = v$. \square

3.1.4 Existence de solutions pour des nombres d'onde réels

Lorsque κ est réel, la forme sesquilinéaire a définie lors de la démonstration du théorème 3.11 n'est pas coercive, mais nous pouvons utiliser la théorie de Fredholm ou un principe d'absorption limite pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème extérieur de Helmholtz. Dans ce paragraphe, nous présentons une telle démonstration due à Phillips [50, pp.152-160]. Elle consiste à considérer le problème extérieur comme une perturbation du problème dans l'espace libre et à se ramener à un problème auxiliaire qui consiste à chercher un terme source pour lequel il est possible de construire une solution du problème initial. Le problème auxiliaire est associé à une perturbation compacte de l'identité et entre dans le cadre de la théorie de Fredholm.

Proposition 3.15. *Pour $\kappa \in \mathbb{R}^*$, le problème extérieur de Helmholtz (3.16a)-(3.16b) admet exactement une solution.*

Démonstration. Considérons ρ un réel strictement positif tel que le support du terme source et Γ soient inclus dans la boule \mathcal{B}_ρ de centre $\mathbf{0}$ et de rayon ρ et posons

$$\Omega_\rho = \Omega \cap \mathcal{B}_\rho. \quad (3.18)$$

D'après la proposition 3.4, pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact et disjoint de l'origine, une solution sortante de l'équation de Helmholtz $-\Delta v - \kappa^2 v = g$ dans l'espace libre \mathbb{R}^3 est donnée par

$$v_g = G_\kappa * g. \quad (3.19)$$

D'après la remarque 3.6, $v_g \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. Nous effectuons un relèvement de v_g et considérons $h_g \in H^1(\Omega_\rho)$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta h_g - i\kappa^2 h_g = 0, & \text{dans } \Omega_\rho, & (3.20a) \\ h_g = v_g, & \text{sur } \Gamma, & (3.20b) \\ h_g = 0, & \text{sur } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \rho\}. & (3.20c) \end{cases}$$

Considérons χ une fonction de troncature à support compact dans \mathcal{B}_ρ qui vaut 0 dans un voisinage de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \rho\}$, 1 dans un voisinage de Γ et posons

$$\begin{cases} u_g = v_g - \chi h_g & \text{dans } \Omega_\rho, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} u_g = v_g & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_\rho. \end{cases} \quad (3.22)$$

La fonction u_g est bien définie dans Ω et vaut 0 sur Γ . Il s'agit de rechercher g tel que u_g soit solution de l'équation de Helmholtz $-\Delta u - \kappa^2 u = f$ dans Ω . Le problème (3.16a)-(3.16b) est équivalent à rechercher $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact dans Ω_ρ tel que

$$-\Delta u_g - \kappa^2 u_g = g - T_\kappa g = f, \quad \text{où } T_\kappa g = -2\nabla \chi \cdot \nabla h_g - (\kappa^2(i+1)\chi + \Delta \chi)h_g. \quad (3.23)$$

L'opérateur T_κ est linéaire et continu de $L^2(\Omega_\rho)$ dans $L^2(\Omega_\rho)$. De plus, T_κ est compact. En effet, considérons $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact dans Ω_ρ . Alors $g|_{\Omega_\rho} \in L^2(\Omega_\rho)$ et

$$\begin{aligned} L^2(\Omega_\rho) &\xrightarrow{\text{continu}} H^2(\Omega_\rho) \xrightarrow{\text{compact}} H^1(\Omega_\rho) \xrightarrow{\text{continu}} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\text{continu}} H^1(\Omega_\rho) \xrightarrow{\text{continu}} L^2(\Omega_\rho) \\ g|_{\Omega_\rho} &\mapsto v_g|_{\Omega_\rho} \mapsto v_g|_{\Omega_\rho} \mapsto (\gamma v_g)|_\Gamma \mapsto h_g \mapsto T_\kappa g. \end{aligned}$$

Donc $T_\kappa : L^2(\Omega_\rho) \rightarrow L^2(\Omega_\rho)$ est compact pour ρ suffisamment grand. D'après l'alternative de Fredholm (c.f. A.2), il suffit de montrer l'injectivité de l'opérateur $I - T_\kappa$ pour assurer sa bijectivité. Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact dans Ω_ρ tel que $T_\kappa g = g$. Alors la fonction v définie par (3.19), vérifie l'équation

$$\Delta v|_{\Omega_\rho} + \kappa^2 v|_{\Omega_\rho} = g = -\Delta(\chi h) - \kappa^2 \chi h, \quad \text{dans } \Omega_\rho, \quad (3.24)$$

où h est l'unique solution de (3.20a)-(3.20c). Donc $\varphi = v - \chi h$ est une solution sortante du problème

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$\quad (3.25b)$$

Remarquons que φ vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini car $\varphi = v$ dans un voisinage de l'infini et v la vérifie (la solution définie par (3.19) est sortante). D'après le théorème d'unicité, il vient que $\varphi = 0$ dans $\bar{\Omega}$. En particulier, h coïncide avec v dans un voisinage de Γ . Ainsi, la fonction z définie comme suit est un élément de $H^1(\mathcal{B}_\rho)$

$$\begin{cases} z = v, & \text{dans } D, \\ z = h, & \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases}$$

Elle vérifie au sens des distributions

$$\begin{cases} \Delta z + \zeta z = 0, & \text{dans } \mathcal{B}_\rho, \\ z = 0, & \text{sur } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \rho\}, \end{cases} \quad (3.26a)$$

$$\quad (3.26b)$$

où $\zeta = \kappa^2$ dans \bar{D} et $\zeta = -i\kappa^2$ dans Ω_ρ . En prenant z comme fonction-test dans la formulation variationnelle associée au problème (3.26a)-(3.26b), nous obtenons

$$\int_{\mathcal{B}_\rho} |\nabla z|^2 - \zeta |z|^2 \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.27)$$

En prenant la partie imaginaire de l'équation ci-dessus, comme $\kappa^2 \in \mathbb{R}_*^+$, il suit

$$\int_{\Omega_\rho} |z|^2 \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.28)$$

donc $h = 0$ dans Ω_ρ , puis

$$g = -\Delta(\chi h) - \kappa^2 \chi h = 0. \quad (3.29)$$

La bijectivité de $I - T_\kappa$ entraîne alors l'existence d'une solution $u \in L^2(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ (d'après la remarque 3.6) du problème (3.16a)-(3.16b). \square

3.1.5 Régularité des solutions

Ce premier résultat est un corollaire de la proposition B.8.

Corollaire 3.16. *Si $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u - \kappa^2 u = 0$ dans Ω alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et nous avons*

$$\|u\|_{m,K'} \leq c_{m,K'} \|u\|_{0,K} \quad \forall K' \subset K \text{ compacts de } \Omega, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3.30)$$

tels que K' soit inclus dans l'ouverture de K .

Corollaire 3.17. *Si $f \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ est à support compact dans Ω alors la solution de l'équation de Helmholtz (3.16a)-(3.16b) appartient à la classe des fonctions $H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$.*

Corollaire 3.18. *Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est à support compact dans Ω alors la solution de l'équation de Helmholtz (3.16a)-(3.16b) appartient à la classe des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Nous énonçons des résultats similaires sur les solutions du problème de Helmholtz en domaine (ouvert) borné qui sont issus de [37].

Corollaire 3.19. *Si $u \in H_0^1(D)$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u - \kappa^2 u = 0$ dans D alors $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$ et nous avons*

$$\|u\|_{m,K} \leq c_{m,K} \|u\|_{0,D}, \quad \forall K \text{ compact de } D, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.31)$$

Corollaire 3.20. *Si $f \in H^m(D)$ alors la solution de l'équation de Helmholtz $-\Delta u - \kappa^2 u = f$ dans D , munie de la condition aux limites $u = 0$ sur Γ , appartient à la classe des fonctions $H^{m+2}(D)$.*

3.2 Existence, unicité et régularité de la solution du problème de Maxwell

Il est naturel de choisir des termes source réguliers en vue d'une application en simulation numérique ou afin d'être représentatif de ce que nous côtoyons dans la nature. Toutefois, le cadre théorique, et plus précisément le théorème de trace tangentielle, nous permet d'étendre notre catégorie de données de bord à des fonctions moins régulières, appartenant à la classe des fonctions $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. La définition de cet espace est donnée par (2.57b). Nous considérons le problème extérieur du second ordre de Maxwell : chercher $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\lambda}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.32a)$$

$$(3.32b)$$

où le terme source $\mathbf{J} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ est à support compact dans Ω , \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de D et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Le champ magnétique \mathbf{H} peut être déduit du champ électrique à partir de l'identité

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.33)$$

Par ailleurs, le champ \mathbf{H} vérifie la condition aux limites

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{rot}_\Gamma(\gamma_t \mathbf{E}) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{n} \times \gamma_\times \mathbf{E}) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.34)$$

Dans la suite, sauf en cas d'indication contraire, le nombre d'onde κ est défini par

$$\begin{cases} \kappa^2 = \left(\epsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mu_0 \omega^2, \\ \Im(\kappa) > 0, \end{cases} \quad (3.35a) \quad (3.35b)$$

où la permittivité du vide ϵ_0 , la perméabilité du vide μ_0 et la conductivité σ trois constantes strictement positives.

Remarque 3.21. Le choix de la régularité $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ à support compact pour le terme source \mathbf{J} est justifié par la loi de conservation de la charge (en régime harmonique) dans un milieu conducteur, donnée par

$$\left(i\omega - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \varrho = \mathbf{div} \mathbf{J}, \quad (3.36)$$

où ϱ désigne la densité de charge. La fonction ϱ est naturellement un élément de $L^1(\Omega)$ (à support compact) mais, afin de conserver notre cadre variationnel, il faut supposer que $\varrho \in L^2(\Omega)$. De plus, la loi de Gauss, donnée par

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}, \quad (3.37)$$

nous amène à rechercher des solutions du problème extérieur de l'électromagnétisme dans l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ plutôt que dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Remarque 3.22. Lorsque κ est réel, le problème (3.32a)-(3.32b) est mal posé car il ne donne aucune information sur le comportement à l'infini de la solution recherchée. Pour retrouver la notion de causalité dans l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$, nous pouvons utiliser la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}| (\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{x}} - i\kappa \mathbf{E}) = \mathbf{0}, \quad \text{uniformément en } \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.38)$$

où $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. Comme pour l'équation de Helmholtz, il est aussi possible d'utiliser un principe d'absorption limite [31] pour remédier au caractère mal posé du problème dans l'espace libre.

Cette section est dédiée à l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème extérieur de l'électromagnétisme. Dans un premier temps, nous déterminons la solution fondamentale (ou *tenseur de Green*) des équations de Maxwell dans l'espace libre [31]. Dans un second temps, nous étudierons l'existence et l'unicité du problème extérieur de Maxwell présenté ci-dessus.

3.2.1 Solution fondamentale des équations de Maxwell dans l'espace libre

Dans ce paragraphe, nous considérons l'équation du second ordre de Maxwell dans l'espace libre \mathbb{R}^3 qui met en jeu le champ électrique \mathbf{E} , donnée par

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{F}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (3.39)$$

où $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ est à support compact disjoint de l'origine et le nombre d'onde κ est tel que $\mathfrak{I}(\kappa) > 0$. Nous allons expliciter un tenseur $\mathbb{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathbf{E} = \mathbb{G} * \mathbf{F}, \quad (3.40)$$

où le produit de convolution est interprété au sens suivant : si $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ est une matrice carrée de dimension d et \mathbf{u} un élément de \mathbb{R}^d alors

$$(\mathbf{A} * \mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j} * u_j, \quad (3.41)$$

pour tout $i = 1, \dots, d$. Rappelons que la fonction de Green de l'équation de Helmholtz est donnée par $G_\kappa(\mathbf{x}) = \exp(i\kappa|\mathbf{x}|)/(4\pi|\mathbf{x}|)$, voir le corollaire 3.2. Le résultat suivant est issu de [31, section 4.2.2] :

Proposition 3.23. *Une solution \mathbf{E}_κ de l'équation du second ordre de Maxwell (3.39) est donnée par*

$$\mathbf{E}_\kappa = G_\kappa * \mathbf{F} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \text{div} (G_\kappa * \mathbf{F}), \quad (3.42)$$

où $*$ désigne le produit de convolution, composante par composante, au sens des distributions.

Démonstration. En appliquant ∇div à l'équation (3.39), nous obtenons

$$\nabla \text{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\kappa^2} \nabla \text{div} \mathbf{F}. \quad (3.43)$$

D'après l'identité $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} + \nabla \text{div} \mathbf{E}$, il vient que

$$-\Delta \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{F} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \text{div} \mathbf{F}. \quad (3.44)$$

Nous utilisons la proposition 3.4 et l'identité $G_\kappa * \nabla \text{div} \mathbf{F} = \nabla \text{div} (G_\kappa * \mathbf{F})$ pour conclure. \square

Remarque 3.24. Si $\mathfrak{I}(\kappa) > 0$ nous pouvons passer par la transformée de Fourier sur l'équation (3.39). Nous avons

$$-\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \widehat{\mathbf{E}}) - \kappa^2 \widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{F}}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (3.45)$$

Cette équation a du sens dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ [48, chapitre 7]. À $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ fixé, nous décomposons $\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})$ en une somme orthogonale

$$\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \cdot \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) \right) \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} + \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \times \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) \right) \times \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|},$$

expression équivalente à

$$|\boldsymbol{\xi}|^2 \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})) \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \times \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})) \times \boldsymbol{\xi}.$$

De l'équation (3.45), nous déduisons que

$$\widehat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\kappa^2} \widehat{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\xi} \times \widehat{\mathbf{E}}) \times \boldsymbol{\xi} = \widehat{\mathbf{F}} + \kappa^2 \widehat{\mathbf{E}}.$$

Donc

$$(|\xi|^2 - \kappa^2) \widehat{\mathbf{E}}(\xi) = \widehat{\mathbf{F}}(\xi) - \frac{1}{\kappa^2} (\widehat{\mathbf{F}}(\xi) \cdot \xi) \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (3.46)$$

D'après l'expression de la transformée de Fourier de la fonction de Green de Helmholtz (3.14), il vient que

$$\widehat{\mathbf{E}}(\xi) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \left(\widehat{\mathbf{F}}(\xi) - \frac{1}{\kappa^2} (\widehat{\mathbf{F}}(\xi) \cdot \xi) \xi \right) \widehat{G}_\kappa(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Enfin, en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier inverse, nous obtenons

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} * G_\kappa(\mathbf{x}) + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \operatorname{div} (\mathbf{F} * G_\kappa)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Proposition 3.25. *Si $\mathfrak{I}(\kappa) > 0$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ est à support compact alors la solution \mathbf{E}_κ du problème (3.39) appartient à la classe des fonctions $\mathbf{H}^1(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. Réécrivons l'expression de \mathbf{E}_κ sous la forme

$$\mathbf{E}_\kappa(\mathbf{x}) = G_\kappa * \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\kappa^2} \nabla (G_\kappa * \operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x}). \quad (3.47)$$

Le champ \mathbf{E}_κ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ d'après l'inégalité de convolution de Young car $G_\kappa \in L^1(\mathbb{R}^3)$ (car $\mathfrak{I}(\kappa) > 0$), $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact, $\nabla G_\kappa \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^3)$ et $\operatorname{div} \mathbf{F} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa(\mathbf{x}) = G_\kappa * \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (3.48)$$

Le rotationnel de \mathbf{F} n'étant a priori pas un élément de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$, le produit de convolution $*$ doit être interprété au sens des distributions. En travaillant composante par composante, nous renvoyons les dérivées portant sur les composantes de \mathbf{F} sur G_κ , qui, elles, sont des éléments de $L^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, nous obtenons que $\operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa$ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Enfin, nous avons

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_\kappa(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (3.49)$$

car $-\Delta G_\kappa = \kappa^2 G_\kappa + \delta_0$, d'où $\operatorname{div} \mathbf{E}_\kappa$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)$. D'après le théorème B.10,

$$\mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3). \quad (3.50)$$

De plus, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa = \mathbf{F} + \kappa^2 \mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ donc $\operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa$ appartient à $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa = 0$ donc $\operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa$ appartient à $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$. Toujours d'après le théorème B.10,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3). \quad (3.51)$$

Par définition, il suit $\mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}^1(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3)$. □

Proposition 3.26. *Si $\kappa \in \mathbb{R}^*$, la solution \mathbf{E}_κ du problème (3.39) appartient à $\mathbf{H}_{\operatorname{loc}}^1(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. Notons respectivement $(E_\kappa^i)_{i=1,2,3}$ et $(F_i)_{i=1,2,3}$ les composantes de \mathbf{E}_κ et \mathbf{F} . Pour $i = 1, 2, 3$, puisque nous avons

$$|E_\kappa^i| \leq G_0 * |F_i| + \frac{1}{\kappa^2} |\partial_{x_i} G_\kappa| * |\operatorname{div} \mathbf{F}|, \quad (3.52)$$

la proposition 3.6 implique que le premier terme de l'expression précédente est un élément de $L^6(\mathbb{R}^3)$. D'autre part, décomposons le second terme sous la forme

$$|\partial_{x_i} G_\kappa| * |\operatorname{div} \mathbf{F}| = (\chi |\partial_{x_i} G_\kappa|) * |\operatorname{div} \mathbf{F}| + (1 - \chi) |\partial_{x_i} G_\kappa| * |\operatorname{div} \mathbf{F}|, \quad (3.53)$$

où χ désigne une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de l'origine et 0 dans un voisinage de l'infini. D'après l'inégalité de Young, comme $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^1(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned} \chi |\partial_{x_i} G_\kappa| \in L^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } |\operatorname{div} \mathbf{F}| \in L^2(\mathbb{R}^3) &\implies \chi |\partial_{x_i} G_\kappa| * |\operatorname{div} \mathbf{F}| \in L^2(\mathbb{R}^3), \\ (1 - \chi) |\partial_{x_i} G_\kappa| \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } |\operatorname{div} \mathbf{F}| \in L^1(\mathbb{R}^3) &\implies (1 - \chi) |\partial_{x_i} G_\kappa| * |\operatorname{div} \mathbf{F}| \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

et ce pour tout $i = 1, 2, 3$. Donc $\mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{L}_{\operatorname{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. De même, nous pouvons montrer que \mathbf{E}_κ appartient à $\mathbf{H}_{\operatorname{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ et d'après le théorème B.11, $\mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, nous avons

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{L}_{\operatorname{loc}}^2(\mathbb{R}^3), \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\kappa = \mathbf{F} + \kappa^2 \mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{L}_{\operatorname{loc}}^2(\mathbb{R}^3) \quad (3.54)$$

et $\operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\kappa = 0$, d'où $\mathbf{rot} \mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$. Toujours d'après le théorème B.11, $\mathbf{rot} \mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, puis par définition, $\mathbf{E}_\kappa \in \mathbf{H}_{\operatorname{loc}}^1(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$. \square

Une solution fondamentale des équations de Maxwell [41] est explicitée dans la proposition suivante.

Corollaire 3.27. *Le tenseur de Green $\mathbb{G}_\kappa : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ de l'équation du second ordre de Maxwell est donné par*

$$\mathbb{G}_\kappa = G_\kappa \mathbf{l}_3 + \frac{1}{\kappa^2} \mathbf{D}^2 G_\kappa, \quad (3.55)$$

où \mathbf{l}_3 désigne la matrice identité de dimension trois et \mathbf{D}^2 désigne l'opérateur hessien.

Démonstration. Il suffit de réécrire l'équation (3.46) sous la forme

$$\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \left(\widehat{G}_\kappa(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{\kappa^2} (\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^t) \widehat{G}_\kappa(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) \right), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.56)$$

pour en déduire que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \left(G_\kappa \mathbf{l}_3 + \frac{1}{\kappa^2} \mathbf{D}^2 G_\kappa \right) * \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Ce produit de convolution doit être interprété au sens des distributions. \square

Remarque 3.28 (Sur la régularité de \mathbf{E}). Le champ \mathbf{E} défini par le produit de convolution $\mathbb{G}_\kappa * \mathbf{F}$ appartient à la classe des fonctions $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$. Cela provient de l'équivalence entre les équations (3.46) et (3.56) et de la remarque 3.25.

3.2.2 Existence et unicité de la solution dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Nous considérons un relèvement $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ de la donnée de bord $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ qui vérifie $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\lambda}$ sur Γ (cela est possible d'après la surjectivité de l'opérateur γ_\times , voir la proposition 2.20) et notons la différence $\mathbf{u} = \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}$. Rappelons que l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ peut être caractérisé par

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \gamma_\times \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\}. \quad (3.57)$$

Le problème extérieur de Maxwell est alors équivalent à chercher $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u} = \mathbf{F}, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.58a)$$

$$(3.58b)$$

où $\mathbf{F} = i\omega\mu_0 \mathbf{J} - \mathbf{rot rot} \tilde{\mathbf{E}} + \kappa^2 \tilde{\mathbf{E}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie

$$\langle \mathbf{F}, \psi \rangle_\Omega = i\omega\mu_0 \int_\Omega \mathbf{J} \cdot \overline{\psi} \, dx - \int_\Omega \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{rot} \overline{\psi} \, dx + \kappa^2 \int_\Omega \tilde{\mathbf{E}} \cdot \overline{\psi} \, dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Cette forme antilinéaire est continue dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, elle peut être prolongée en une forme antilinéaire continue sur $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ (encore notée \mathbf{F}). A posteriori, nous retrouvons les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} à l'aide des identités $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{E}$. Nous définissons la formulation variationnelle associée au problème (3.58a)-(3.58b) qui consiste à chercher $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\psi} \, dx - \kappa^2 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \overline{\psi} \, dx = \langle \mathbf{F}, \psi \rangle_\Omega, \quad \forall \psi \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega). \quad (3.59)$$

Proposition 3.29. *Le problème qui consiste à chercher $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant les équations (3.58a)-(3.58b) est équivalent au problème qui consiste à chercher $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant la formulation faible (3.59).*

Démonstration. Première implication. Supposons que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifie les équations (3.58a)-(3.58b). Alors nous avons

$$\int_\Omega \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\psi} \, dx - \kappa^2 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \overline{\psi} \, dx = \langle \mathbf{F}, \psi \rangle_\Omega, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, en raisonnant comme pour l'équivalence des problèmes faible et fort de Helmholtz, il vient que

$$\int_\Omega \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\psi} \, dx - \kappa^2 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \overline{\psi} \, dx = \langle \mathbf{F}, \psi \rangle_\Omega, \quad \forall \psi \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega).$$

Seconde implication. Supposons que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifie la formulation faible (3.59). Alors $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ et

$$\int_\Omega \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\psi} \, dx - \kappa^2 \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \overline{\psi} \, dx = \langle \mathbf{F}, \psi \rangle_\Omega, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

car $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est inclus dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. Cela est équivalent, au sens des distributions, à

$$\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

□

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 3.30. *Soit $\mathbf{F} \in (\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega))'$. Il existe un unique $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant le problème extérieur de Maxwell (3.58a)-(3.58b).*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de la formulation faible. Notons a la forme sesquilinéaire sur $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ définie par

$$a(\mathbf{u}, \psi) = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\psi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \overline{\psi} \, d\mathbf{x}$$

et ℓ la forme antilinéaire continue sur $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ définie par

$$\ell(\psi) = \langle \mathbf{F}, \psi \rangle_{\Omega}.$$

La forme sesquilinéaire a est continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et coercive sur $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. En effet, notant θ_{κ} l'argument du nombre complexe $\kappa = |\kappa| \exp(i\theta_{\kappa})$, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| &= \left| \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\kappa}\right)\right) a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right|, \\ &\geq \Re \left[\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\kappa}\right)\right) a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right], \\ &\geq \sin \theta_{\kappa} \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \Re \left[\kappa^2 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\kappa}\right)\right) \right] \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \\ &\geq \sin \theta_{\kappa} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} + |\kappa|^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right), \end{aligned}$$

donc a est coercive (car $\Im(\kappa) > 0$). D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant $a(\mathbf{u}, \psi) = \ell(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. \square

Ainsi, pour tout relèvement $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ de $\boldsymbol{\lambda}$, il existe un unique $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ vérifiant le problème (3.58a)-(3.58b). Par conséquent, la fonction $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ définit l'unique solution du problème (3.32a)-(3.32b). Nous introduisons l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot} \mathbf{rot}, \Omega)$ défini par

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot} \mathbf{rot}, \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (3.60)$$

Corollaire 3.31. Soient $\mathbf{J} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_{\Gamma}, \Gamma)$. Il existe un unique \mathbf{E} appartenant à la classe des fonctions $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{rot} \mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ vérifiant le problème extérieur de Maxwell (3.32a)-(3.32b).

Démonstration. Par construction, le champ électrique \mathbf{E} appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et le champ magnétique \mathbf{H} appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ car $\mathbf{div} \mathbf{H} = 0$ dans Ω . De plus, \mathbf{E} vérifie l'équation

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \kappa^2 \mathbf{E} + i\omega\mu_0 \mathbf{J},$$

donc $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot} \mathbf{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Enfin, en prenant la divergence de l'équation précédente, nous avons

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \mathbf{div} \mathbf{J},$$

donc, puisque $\mathbf{div} \mathbf{J} \in L^2(\Omega)$, il vient que $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$. \square

3.2.3 Existence et unicité de la solution dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$

Nous venons de présenter une méthode qui nous permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème extérieur de Maxwell dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ et qui, a posteriori, nous permet d'assurer que la solution forte du problème extérieur de Maxwell appartient

(au moins) à la classe des fonctions $X(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$. Nous munissons ce dernier espace de la norme du graphe

$$\|\mathbf{u}\|_{X(\Omega)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2. \quad (3.61)$$

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une méthode alternative qui assure l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème extérieur de Maxwell dans $X(\Omega)$. Sur la frontière du domaine Γ , nous considérons la condition de conducteur parfait

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Une formulation variationnelle associée au problème extérieur de Maxwell qui consiste à chercher \mathbf{E} dans $X(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{J} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.62a)$$

$$(3.62b)$$

où $\mathbf{J} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ et le nombre complexe κ est tel que $\Im(\kappa) > 0$, s'écrit : chercher $\mathbf{E} \in X_N(\Omega) = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \bar{\psi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \bar{\psi} \, d\mathbf{x} = i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\psi} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in X_N(\Omega). \quad (3.63)$$

L'expression de gauche définit une forme sesquilinéaire continue qui n'est en général pas coercive par rapport à la topologie $X_N(\Omega)$, c'est pourquoi nous introduisons une formulation dite *régularisée* qui fait intervenir la divergence du champ électrique [18, 44]. Elle consiste à chercher $\mathbf{E} \in X_N(\Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{E} \mathbf{div} \bar{\psi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \bar{\psi} \, d\mathbf{x} = \ell(\psi), \quad \forall \psi \in X_N(\Omega), \quad (3.64)$$

où

$$\ell(\psi) = i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\psi} \, d\mathbf{x} - \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{J} \mathbf{div} \bar{\psi} \, d\mathbf{x}. \quad (3.65)$$

Proposition 3.32. *Soient $\mathbf{J} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ et $\mathbf{E} \in X(\Omega)$ une solution du problème extérieur de Maxwell (3.62a)-(3.62b). Alors \mathbf{E} appartient à $X_N(\Omega)$ et \mathbf{E} est solution de la formulation faible régularisée (3.64).*

Démonstration. Il suffit d'interpréter l'équation (3.62a) au sens des distributions, d'utiliser la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ puis l'inclusion de $X_N(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ pour obtenir la formulation faible (3.63). Ensuite, en prenant la divergence de l'équation (3.62a), nous obtenons

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \mathbf{div} \mathbf{J}. \quad (3.66)$$

Il suffit d'insérer de part et d'autre de la formulation variationnelle (3.63) le terme

$$\int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{E} \mathbf{div} \bar{\psi} \, d\mathbf{x} = -\frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{J} \mathbf{div} \bar{\psi} \, d\mathbf{x}, \quad (3.67)$$

qui est bien défini pour $\psi \in X_N(\Omega)$ et nous obtenons la formulation faible régularisée (3.64). \square

Théorème 3.33. Si $\mathbf{E} \in X_N(\Omega)$ est une solution faible de (3.64) associée à $\mathbf{J} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ à support compact, alors

$$\text{div } \mathbf{E} + \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad (3.68)$$

et \mathbf{E} vérifie le problème du second ordre de Maxwell (3.62a)-(3.62b).

Démonstration. Nous définissons l'opérateur de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Dir}} : D(\Delta_{\text{Dir}}) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ \varphi &\longmapsto \Delta\varphi, \end{aligned}$$

dont le domaine $D(\Delta_{\text{Dir}})$ est défini par

$$D(\Delta_{\text{Dir}}) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (3.69)$$

Par définition, nous remarquons que si $\varphi \in D(\Delta_{\text{Dir}})$, alors $\nabla\varphi \in X_N(\Omega)$ car

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &\in \mathbf{L}^2(\Omega), & \mathbf{rot} \nabla\varphi &= \mathbf{0} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{n} \times \nabla\varphi &= -\mathbf{rot}_\Gamma(\gamma\varphi) = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, & \text{div } \nabla\varphi &= \Delta\varphi \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{E} \in X_N(\Omega)$ une solution faible de (3.64). Nous choisissons $\boldsymbol{\psi} = \nabla\varphi$ comme fonction-test, avec $\varphi \in D(\Delta_{\text{Dir}})$. Nous avons

$$\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{E}) \Delta\bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \nabla\bar{\varphi} \, d\mathbf{x} = i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \nabla\bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{J}) \Delta\bar{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

Puisque \mathbf{E} et \mathbf{J} appartiennent à $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ et $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, d'après la formule de Green (2.51), il suit

$$\int_{\Omega} \left(\text{div } \mathbf{E} + \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{J} \right) (\Delta\bar{\varphi} + \kappa^2\bar{\varphi}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Delta_{\text{Dir}}).$$

Comme $\text{div } \mathbf{E} + \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{J}$ appartient à $L^2(\Omega)$, il existe un unique $\varphi \in D(\Delta_{\text{Dir}})$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - \kappa^2\varphi = \text{div } \mathbf{E} + \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{J}, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En choisissant ce φ comme fonction-test, il vient

$$\text{div } \mathbf{E} + \frac{i\omega\mu_0}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Nous concluons en utilisant la proposition 3.10. \square

Théorème 3.34. Soit $\mathbf{J} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Il existe une unique $\mathbf{E} \in X(\Omega)$ vérifiant le problème de Maxwell (3.62a)-(3.62b).

Démonstration. Puisque $\mathfrak{I}(\kappa) > 0$, la forme sesquilinéaire associée à la formulation variationnelle régularisée étant coercive sur $X_N(\Omega)$ pour la norme (3.61), nous utilisons le lemme de Lax-Milgram et l'équivalence des formulations faible et forte pour conclure à l'existence et l'unicité d'une solution au problème extérieur de Maxwell. \square

3.2.4 Remarques et compléments pour des nombres d'onde réels

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème extérieur de l'électromagnétisme lorsque le nombre d'onde κ est réel. Le lemme suivant [17, théorème 6.11] nous permet d'établir l'unicité des solutions du problème extérieur de Maxwell (3.32a)-(3.32b).

Lemme 3.35 (Lemme de Rellich). *Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ une solution de l'équation $\mathbf{rot rot E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans Ω vérifiant la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller, telle que*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.70)$$

Alors $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans $\overline{\Omega}$.

Le résultat d'unicité est le suivant :

Théorème 3.36. *Pour $\kappa \in \mathbb{R}^*$, le problème extérieur de Maxwell (3.32a)-(3.32b) admet au plus une solution sortante.*

Démonstration. Soient \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 deux solutions sortantes du problème de Maxwell (3.32a)-(3.32b) et notons \mathbf{u} la différence $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$. Elle vérifie l'équation de Maxwell homogène $\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ dans Ω , la condition aux limites $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ et la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller. Nous procédons de la même manière que pour démontrer l'unicité d'une solution au problème de Helmholtz et définissons, pour $\rho > 0$ suffisamment grand, le domaine $\Omega_\rho = \Omega \cap \mathcal{B}_\rho$, où \mathcal{B}_ρ désigne la boule ouverte de centre $\mathbf{0}$ et de rayon ρ et nous notons \mathbf{n}_ρ le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de \mathcal{B}_ρ . En multipliant l'équation $\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u}$ par $\bar{\mathbf{u}}$ et en appliquant la formule de Green (2.53), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\rho} (\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{x}, \\ &= \int_{\Omega_\rho} (|\mathbf{rot u}|^2 - \kappa^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{rot u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} + \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\mathbf{n}_\rho \times \mathbf{rot u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

D'après l'identité vectorielle $(\mathbf{n} \times \mathbf{rot u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{rot u}$ et la condition aux limites vérifiée par \mathbf{u} sur Γ , il suit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} (|\mathbf{rot u}|^2 - \kappa^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} &= \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\mathbf{rot u} \times \mathbf{n}_\rho) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \\ &= \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\mathbf{rot u} \times \mathbf{n}_\rho - i\kappa \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} + i\kappa \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Nous prenons la partie imaginaire des termes situés de part et d'autre de l'égalité, il vient

$$\Im \left(\int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} (\mathbf{rot u} \times \mathbf{n}_\rho - i\kappa \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} \right) + \kappa \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = 0.$$

Puisque \mathbf{u} vérifie la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous déduisons

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.71)$$

D'après le lemme de Rellich, nous concluons que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ dans $\overline{\Omega}$. Donc la solution, si elle existe, est unique. \square

Pour démontrer l'existence d'une solution au problème extérieur de Maxwell lorsque $\kappa \in \mathbb{R}^*$, avec une condition de conducteur parfait sur la frontière Γ du domaine, nous adaptions la démonstration de Phillips [50, pp.152-160] présentée dans le paragraphe 3.1.4 pour le problème de Helmholtz. Le résultat d'existence est le suivant :

Proposition 3.37. *Pour $\kappa \in \mathbb{R}^*$, le problème extérieur de Maxwell (3.32a)-(3.32b) muni de la condition de conducteur parfait admet exactement une solution sortante.*

Démonstration. Nous considérons un réel ρ strictement positif tel que le support du terme source et Γ soient inclus dans la boule \mathcal{B}_ρ de centre $\mathbf{0}$ et de rayon ρ et posons $\Omega_\rho = \Omega \cap \mathcal{B}_\rho$. D'après le paragraphe 3.2.1, pour tout $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ à support compact et disjoint de l'origine, la solution sortante de l'équation du second ordre de Maxwell $\text{rot rot } \mathbf{v} - \kappa^2 \mathbf{v} = \mathbf{F}$ dans \mathbb{R}^3 est donnée par

$$\mathbf{v}_\mathbf{F} = \mathbb{G}_\kappa * \mathbf{F}. \quad (3.72)$$

D'après la proposition 3.26, $\mathbf{v}_\mathbf{F}$ appartient à $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\text{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$. Nous effectuons un relèvement de la trace tangentielle de $\mathbf{v}_\mathbf{F}$ appartenant à $\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ et considérons $\mathbf{u}_\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_\rho) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_\rho)$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{u}_\mathbf{F} + i\kappa^2 \mathbf{u}_\mathbf{F} = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega_\rho, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u}_\mathbf{F} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_\mathbf{F}, & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u}_\mathbf{F} = \mathbf{0}, & \text{sur } \{|\mathbf{x}| = \rho\}. \end{cases} \quad (3.73a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}_\mathbf{F} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_\mathbf{F}, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.73b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}_\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \{|\mathbf{x}| = \rho\}. \quad (3.73c)$$

Remarque 3.38. Ce problème admet une unique solution [40, chapitre 4].

Soit χ une fonction de troncature qui vaut 0 dans un voisinage de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \rho\}$, 1 dans un voisinage de Γ et posons

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\mathbf{F} = \mathbf{v}_\mathbf{F} - \chi \mathbf{u}_\mathbf{F}, & \text{dans } \Omega_\rho, \end{cases} \quad (3.74a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\mathbf{F} = \mathbf{v}_\mathbf{F}, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_\rho. \end{cases} \quad (3.74b)$$

Cette fonction est bien définie dans Ω et vérifie la condition de conducteur parfait sur la frontière Γ . Il s'agit de rechercher \mathbf{F} tel que $\mathbf{E}_\mathbf{F}$ soit solution de l'équation de Maxwell du second ordre $\text{rot rot } \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}$ dans Ω . Par unicité de la solution, le problème est équivalent à rechercher $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ à support compact dans Ω_ρ tel que

$$\mathbf{F} - \mathbf{T}_\kappa \mathbf{F} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.75)$$

où l'opérateur \mathbf{T}_κ est défini par

$$\mathbf{T}_\kappa \mathbf{F} = (-\Delta\chi + \kappa^2(i-1)\chi)\mathbf{u}_\mathbf{F} + \nabla\chi \times \text{rot } \mathbf{u}_\mathbf{F} + (\mathbf{u}_\mathbf{F} \cdot \nabla)\nabla\chi - (\nabla\chi \cdot \nabla)\mathbf{u}_\mathbf{F}. \quad (3.76)$$

L'opérateur \mathbf{T}_κ est linéaire et continu de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega_\rho)$ dans lui-même. De plus, \mathbf{T}_κ est compact. En effet, soit $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ à support compact dans Ω_ρ . Alors $\mathbf{F}|_{\Omega_\rho} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_\rho)$ et \mathbf{T}_κ se décompose sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_\rho) & \xrightarrow{\text{continu}} & \mathbf{H}^1(\text{rot}, \Omega_\rho) & \xrightarrow{\text{compact}} & \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_\rho) & \xrightarrow{\text{continu}} & \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{F}|_{\Omega_\rho} & \longmapsto & \mathbf{v}_\mathbf{F}|_{\Omega_\rho} & \longmapsto & \mathbf{v}_\mathbf{F}|_{\Omega_\rho} & \longmapsto & (\gamma_\times \mathbf{v}_\mathbf{F})|_\Gamma \\ \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) & \xrightarrow{\text{continu}} & \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_\rho) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_\rho) & \xrightarrow{\text{continu}} & \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_\rho) & & \\ (\gamma_\times \mathbf{v}_\mathbf{F})|_\Gamma & \longmapsto & \mathbf{u}_\mathbf{F} & \longmapsto & \mathbf{T}_\kappa \mathbf{F} & & \end{array}$$

car $\mathbf{H}^1(\mathbf{rot}, \Omega_\rho)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_\rho)$ (proposition B.6), $\mathbf{u}_\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ est de classe \mathcal{C}^∞ à l'intérieur de Ω_ρ et $\nabla \chi$ vaut 0 au voisinage de Γ et de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \rho\}$. Donc $\mathbf{T}_\kappa : \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega_\rho) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega_\rho)$ est compact pour ρ suffisamment grand. D'après l'alternative de Fredholm (c.f. A.2), l'opérateur $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$ est bijectif si et seulement s'il est injectif. Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3)$ à support compact dans Ω_ρ tel que $\mathbf{T}_\kappa \mathbf{F} = \mathbf{F}$. Alors la fonction $\mathbf{v}_\mathbf{F}$ définie par 3.19, vérifie l'équation

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}_\mathbf{F} - \kappa^2 \mathbf{v}_\mathbf{F} = \mathbf{F} = \mathbf{rot} \mathbf{rot} (\chi \mathbf{u}_\mathbf{F}) - \kappa^2 \chi \mathbf{u}_\mathbf{F}. \quad (3.77)$$

Donc $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}_\mathbf{F} - \chi \mathbf{u}_\mathbf{F}$ est une solution sortante du problème

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} - \kappa^2 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.78a)$$

$$(3.78b)$$

Remarquons que $\boldsymbol{\psi}$, qui coïncide avec $\mathbf{v}_\mathbf{F}$ dans un voisinage de l'infini, vérifie la condition de rayonnement de Silver-Müller car $\mathbf{v}_\mathbf{F}$ la vérifie. D'après le théorème d'unicité 3.36, il vient que $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ dans $\bar{\Omega}$. En particulier, $\mathbf{u}_\mathbf{F}$ coïncide avec $\mathbf{v}_\mathbf{F}$ dans un voisinage de Γ . Ainsi, la fonction vectorielle \mathbf{z} définie comme suit est un élément de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_\rho) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{B}_\rho)$

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{v}_\mathbf{F}, & \text{dans } D, \\ \mathbf{z} = \mathbf{u}_\mathbf{F}, & \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases} \quad (3.79a)$$

$$(3.79b)$$

Elle vérifie au sens des distributions

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{z} - \zeta \mathbf{z} = \mathbf{0}, & \text{dans } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < \rho\}, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{z} = \mathbf{0}, & \text{sur } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \rho\}, \end{cases} \quad (3.80a)$$

$$(3.80b)$$

où $\zeta = \kappa^2$ dans \bar{D} et $\zeta = -i\kappa^2$ dans Ω_ρ . En prenant \mathbf{z} comme fonction-test dans la formulation variationnelle associée au problème (3.80a)-(3.80b), nous obtenons

$$\int_{\{|\mathbf{x}| < \rho\}} |\mathbf{rot} \mathbf{z}|^2 - \zeta |\mathbf{z}|^2 \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.81)$$

En prenant la partie imaginaire de l'équation ci-dessus, comme $\kappa^2 \in \mathbb{R}_*^+$, il suit

$$\int_{\Omega_\rho} |\mathbf{z}|^2 \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.82)$$

donc $\mathbf{u}_\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dans $\bar{\Omega}_\rho$, puis

$$\mathbf{F} = \mathbf{rot} \mathbf{rot} (\chi \mathbf{u}_\mathbf{F}) - \kappa^2 (\chi \mathbf{u}_\mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (3.83)$$

La bijectivité de $\mathbf{I} - \mathbf{T}_\kappa$ entraîne alors l'existence d'une solution $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{div}, \Omega)$ du problème (3.32a)-(3.32b). \square

Chapitre 4

Lemme d'addition scalaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans un premier temps à la résolution de l'équation de Helmholtz homogène dans des géométries sphériques, soit à l'intérieur d'une boule, soit dans un domaine extérieur à une boule, soit dans une couronne, en milieu homogène et isotrope. Pour cela, nous poursuivons l'introduction à la méthode de séparation de variables présentée au paragraphe 2.4.2 ou dans [40], qui nécessite la définition des fonctions spéciales, cf. [33, 49] par exemple. Nous déterminons les *modes* associés à l'équation de Helmholtz [26] et justifions les décompositions modales des solutions de l'équation de Helmholtz dans des géométries sphériques en s'appuyant sur les outils de la théorie spectrale introduits au paragraphe 2.4.3. Dans un second temps, nous nous intéressons au *lemme d'addition scalaire*, encore appelé *lemme de translation de Neumann*. Ce résultat est classiquement utilisé dans l'étude de problèmes de diffraction des ondes acoustiques. Il correspond à une représentation modale de la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_\kappa(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Nous complétons les éléments de démonstration proposés par D. Colton et R. Kress [17] et surtout, affinons les résultats de convergence associés.

4.1 Décomposition spectrale des solutions de l'équation de Helmholtz dans des géométries sphériques

Dans cette section, D désigne la boule \mathcal{B}_R de centre $\mathbf{0}$ et de rayon $R > 0$

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < R\}. \quad (4.1)$$

Nous notons sa frontière

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = R\}. \quad (4.2)$$

Le domaine C désigne la couronne délimitée par deux sphères concentriques de rayon respectif $R_1 < R_2$

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, R_1 < |\mathbf{x}| < R_2\} \quad (4.3)$$

et nous notons $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sa frontière, où

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = R_1\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = R_2\}.$$

Nous déterminons les solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz dans le domaine borné D , dans le domaine extérieur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ et dans la couronne C .

4.1.1 Séparation de variables

Soit u une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$, où $\kappa \in \mathbb{C}$ avec $\Im(\kappa) > 0$. Supposons que u s'écrive sous la forme

$$u(\mathbf{x}) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\phi), \quad (4.4)$$

où le triplet (r, θ, ϕ) désigne les coordonnées sphériques de \mathbf{x} définies dans la section 2.4. En ces coordonnées, remarquons que le Laplacien se décompose de la manière suivante :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathcal{S}^2}, \quad (4.5)$$

où $\Delta_{\mathcal{S}^2}$ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité. L'étude effectuée dans le paragraphe 2.4.2 nous permet d'affirmer que la partie angulaire $\Theta(\theta)\Psi(\phi)$ de la solution correspond aux fonctions harmoniques sphériques $Y_{n,m}(\theta, \phi)$. La partie radiale de u (notée dorénavant R_n) vérifie

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_n}{dr}(r) \right) + \left(\kappa^2 r^2 - n(n+1) \right) R_n(r) = 0 \quad (4.6)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effectuant le changement de variable $z = \kappa r$, nous obtenons

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dR_n}{dz} \right) + \left(z^2 - n(n+1) \right) R_n = 0. \quad (4.7)$$

Cette équation différentielle ordinaire est appelée *équation différentielle de Bessel sphérique*, cf. [33, 49] par exemple.

Définition 4.1. La fonction de Bessel sphérique d'ordre n , notée j_n , est définie par

$$j_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{n+2p}}{2^p p! 1 \cdot 3 \cdots (2n+2p+1)}, \quad (4.8)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et la fonction de Neumann sphérique d'ordre n , notée y_n , est définie par

$$y_n(z) = -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p-n-1}}{2^p p! (-2n+1)(-2n+3) \cdots (-2n+2p+1)}, \quad (4.9)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ces fonctions sont les solutions élémentaires de l'équation différentielle (4.7).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière (4.8) est égal à $+\infty$ donc la représentation de j_n en série entière converge normalement sur tout compact de \mathbb{C} ; le développement de y_n en série de Laurent est analytique pour tout $z \in (0, +\infty)$, elle permet de représenter y_n au voisinage de 0, point en lequel y_n admet une singularité. Nous avons également les formules de Rayleigh [49] :

Proposition 4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons les représentations suivantes :

$$j_n(z) = z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.10a)$$

$$y_n(z) = -z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*. \quad (4.10b)$$

Enfin, nous définissons les *fonctions de Hankel sphériques* de première et seconde espèce d'ordre n par

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z) \quad \text{et} \quad h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z). \quad (4.11)$$

D'après les formules de Rayleigh, une représentation de la fonction de Hankel de première espèce est donnée par

$$h_n^{(1)}(z) = -iz^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\exp(iz)}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*. \quad (4.12)$$

Cela nous permet de déterminer les modes de l'équation de Helmholtz qui constituent une base orthogonale de l'espace des solutions de cette équation [26, chapitre 2]. Dans ce qui suit, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, nous notons $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ et $Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) = Y_{n,m}(\theta, \phi)$.

Théorème 4.3. *Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $|m| \leq n$, la fonction $R_{n,m} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ définie par*

$$R_{n,m}(\mathbf{x}) = j_n(\kappa|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.13)$$

vérifie l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans \mathbb{R}^3 tout entier ; la fonction $S_{n,m} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$ définie par

$$S_{n,m}(\mathbf{x}) = h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.14)$$

vérifie l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Ces notations sont en accord avec la nature des fonctions de base ; les fonctions $R_{n,m}$ sont régulières, les fonctions $S_{n,m}$ admettent une singularité en $\mathbf{0}$. Nous déduisons une décomposition modale des solutions de l'équation de Helmholtz que nous justifions dans le paragraphe suivant à l'aide de la théorie d'interpolation.

Théorème 4.4. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soit $u \in L^2(D)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans D . Alors il existe une suite de nombres complexes $(u_{n,m}^D)$ telle que*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^D R_{n,m}, \quad \text{dans } L^2(D).$$

De plus, cette série converge dans $\mathcal{C}^\infty(D)$.

Théorème 4.5. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soit $u \in L^2(\Omega)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω . Alors il existe une suite de nombres complexes $(u_{n,m}^\Omega)$ telle que*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^\Omega S_{n,m}, \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

De plus, cette série converge dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Théorème 4.6. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soit $u \in L^2(C)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans C . Alors il existe deux suites de nombres complexes $(u_{n,m}^{(1)})$ et $(u_{n,m}^{(2)})$ telles que*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^{(2)} R_{n,m} + u_{n,m}^{(1)} S_{n,m}, \quad \text{dans } L^2(C).$$

De plus, cette série converge dans $\mathcal{C}^\infty(C)$.

4.1.2 Convergence de la série

Dans ce qui suit, nous supposons que $\Im(\kappa) > 0$.

Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(D)$ où $D = \mathcal{B}_R$ (4.1)

Soit $u \in L^2(D)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans $\mathcal{D}'(D)$. Par régularité elliptique, u appartient à $\mathcal{C}^\infty(D)$. D'après l'étude effectuée dans le paragraphe 2.4.3, u se décompose sous la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \text{dans } L^2(D), \quad (4.15)$$

où les fonctions $u_{n,m}$ sont à déterminer. Or, $\Delta u = -\kappa^2 u$ appartient à $L^2(D)$. En particulier,

$$\Delta u \in L^2([a, R) \times \mathcal{S}^2), \quad \forall 0 < a < R, \quad (4.16)$$

où \mathcal{S}^2 désigne la sphère unité de \mathbb{R}^3 , donc il est possible de définir les termes $(\Delta u)_{n,m}$ tels que pour tout $0 < a < R$, nous ayons

$$\int_a^R |(\Delta u)_{n,m}|^2 r^2 dr < +\infty. \quad (4.17)$$

Cela nous permet de considérer $(\Delta u)_{n,m}$ comme une distribution sur le segment $(0, R)$. De plus, au sens des distributions, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0, R)$, nous obtenons d'après le théorème de Fubini et une double intégration par parties :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u)_{n,m}, \varphi \rangle_{(0,R)} &= \int_{r=0}^R \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \Delta u(r, \theta, \phi) Y_{n,m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right\} \varphi(r) dr, \\ &= \left\langle \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) u_{n,m}, \varphi \right\rangle_{(0,R)} + \int_{r=0}^R \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \Delta_\Gamma u(r, \theta, \phi) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right. \\ &\quad \left. \sin \theta d\theta d\phi \right\} \varphi(r) dr, \\ &= \left\langle \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) u_{n,m}, \varphi \right\rangle_{(0,R)} + \int_{r=0}^R \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} u(r, \theta, \phi) \Delta_\Gamma Y_{n,m}(\theta, \phi) \right. \\ &\quad \left. \sin \theta d\theta d\phi \right\} \varphi(r) dr, \\ &= \left\langle \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] u_{n,m}, \varphi \right\rangle_{(0,R)}. \end{aligned}$$

Donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$, tel que $|m| \leq n$, $(\Delta u)_{n,m}$ vérifie

$$(\Delta u)_{n,m} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d u_{n,m}}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} u_{n,m}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, R). \quad (4.18)$$

D'après l'équation vérifiée par u et chacun des termes radiaux de son développement, nous déduisons que $u_{n,m}$ vérifie l'équation différentielle de Bessel sphérique (4.7). Ainsi, la forme générale des termes radiaux du développement est donnée par

$$u_{n,m}(r) = a_{n,m} j_n(\kappa r) + b_{n,m} h_n^{(1)}(\kappa r). \quad (4.19)$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ avec $|m| \leq n$ tels que $b_{n,m} \neq 0$ et notons

$$I_{n,m}^j = \left(\int_0^R |a_{n,m} j_n(\kappa r)|^2 r^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20a)$$

$$I_{n,m}^h = \left(\int_0^R |b_{n,m} h_n^{(1)}(\kappa r)|^2 r^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20b)$$

$$I_{n,m} = \left(\int_0^R |u_{n,m}(r)|^2 r^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.20c)$$

D'une part, puisque $(Y_{n,m})$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathcal{S}^2)$,

$$I_{n,m} \leq \|u\|_{0,D}. \quad (4.21)$$

D'autre part, puisque j_n est borné dans $(0, R)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$I_{n,m}^h \leq I_{n,m} + I_{n,m}^j < \infty, \quad (4.22)$$

et, puisque $r \mapsto h_n^{(1)}(\kappa r)$ n'est pas de carré intégrable au voisinage de 0 lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons également

$$I_{n,m}^h = +\infty, \quad \text{pour } n \neq 0. \quad (4.23)$$

Nous aboutissons à une contradiction, donc $b_{n,m} = 0$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq n$. Donc u admet la décomposition suivante

$$u(r, \theta, \phi) = b_{0,0} h_0^{(1)}(\kappa r) Y_{0,0}(\theta, \phi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} j_n(\kappa r) Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (4.24)$$

Or, d'après la formule de Rayleigh (4.11), une représentation de $h_0^{(1)}$ est donnée par

$$h_0^{(1)}(\kappa r) = -i \frac{\exp(i\kappa r)}{\kappa r} = -\frac{4i\pi}{\kappa} G(r), \quad (4.25)$$

où G désigne la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz. Par ailleurs, u vérifie l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans D , d'où

$$0 = \left[\Delta + \kappa^2 \right] \left(b_{0,0} h_0^{(1)}(\kappa r) Y_{0,0}(\theta, \phi) \right) + \underbrace{\left[\Delta + \kappa^2 \right] \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} j_n(\kappa r) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right)}_{=0}. \quad (4.26)$$

Or, d'après la relation (4.25) et l'équation vérifiée par G , à savoir $-\Delta G - \kappa^2 G = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(D)$, nous déduisons que le premier terme vérifie

$$\left[\Delta + \kappa^2 \right] \left(b_{0,0} h_0^{(1)}(\kappa r) Y_{0,0}(\theta, \phi) \right) = -b_{0,0} \frac{4i\pi}{\kappa} Y_{0,0}(\theta, \phi) \delta_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D). \quad (4.27)$$

Donc $b_{0,0} = 0$. Ainsi, si nous posons $u_{n,m}^D = a_{n,m}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$, la décomposition de u proposée dans le théorème 4.4 est justifiée au sens $L^2(D)$.

Remarque 4.7. Par unicité de la décomposition spectrale, le corollaire 2.31 et le théorème 4.4 impliquent que

$$\int_{\mathcal{S}^2} u(\mathbf{x}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\hat{\mathbf{x}} = u_{n,m}^D j_n(\kappa|\mathbf{x}|). \quad (4.28)$$

En outre, puisque la série converge dans $L^2(D)$ qui est un espace complet, son reste de Cauchy converge vers 0 dans $L^2(D)$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^D R_{n,m} \xrightarrow{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{dans } L^2(D). \quad (4.29)$$

En appliquant le Laplacien au reste de Cauchy, puisque $R_{n,m}$ vérifie l'équation de Helmholtz, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^D R_{n,m} \right) &= \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^D \Delta R_{n,m}, \\ &= -\kappa^2 \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^D R_{n,m}, \\ &\xrightarrow{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad \text{dans } L^2(D),$$

d'après l'expression (4.29). Donc la série converge dans $L^2(\Delta, D) = \{u \in L^2(D), \Delta u \in L^2(D)\}$ et par conséquent aussi dans $H_{\text{loc}}^2(D)$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}^D R_{n,m}, \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^2(D). \quad (4.30)$$

En particulier, l'injection continue de $H_{\text{loc}}^2(D)$ dans $\mathcal{C}^0(D)$ implique la convergence uniforme (en norme L^∞) de la série dans tout compact strictement inclus dans D . Enfin, grâce à la proposition B.9 et à une technique de Bootstrap, nous pouvons démontrer que cette décomposition est vraie dans $H_{\text{loc}}^s(D)$, pour tout entier s puis dans $\mathcal{C}^\infty(D)$ d'après le théorème d'injection 2.2.

Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ où $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ ($D = \mathcal{B}_R$)

Dans un premier temps, nous justifions la décomposition modale d'une fonction u appartenant à la classe des fonctions $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, telle celle présentée dans le paragraphe 2.4.3 pour les fonctions appartenant à $L^2(D)$. Notons que $\Omega = (R, +\infty) \times \mathcal{S}^2$ et par conséquent,

$$u \in L^2([a, L] \times \mathcal{S}^2), \quad \forall L > a > R. \quad (4.31)$$

Pour presque tout $r > R$, u admet une trace $u(r, \cdot, \cdot) \in L^2(\mathcal{S}^2)$. Partout où cette trace existe, par décomposition spectrale, nous avons

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(r) Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad \text{dans } L^2(\mathcal{S}^2), \quad (4.32)$$

pour presque tout $r > R$, où les coefficients spectraux $u_{n,m}(r)$ sont donnés par

$$u_{n,m}(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} u(r, \theta, \phi) Y_{n,m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.33)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$. Pour presque tout $r > R$ et pour $N \in \mathbb{N}$, si nous notons

$$I_N(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left| u - \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(r) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right|^2 \sin \theta \, d\theta d\phi,$$

alors d'après l'identité (4.32), la suite $(I_N(r))$ converge vers 0 pour presque tout $r > R$ et puisque la somme tronquée correspond à une projection orthogonale de $u(r, \cdot, \cdot)$ dans $L^2(\mathcal{S}^2)$, nous avons

$$I_N(r) \leq \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} |u(r, \theta, \phi)|^2 \sin \theta \, d\theta d\phi \in L^1_{r^2}(0, R).$$

D'après le théorème de Lebesgue, il suit

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{n,m}(|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \text{dans } L^2([a, L] \times \mathcal{S}^2), \quad (4.34)$$

pour tous $L > a > R$. À présent, considérons $u \in L^2(\Omega)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω avec $\Im(\kappa) > 0$, cf. paragraphe 3.1.2. Alors, $\Delta u = -\kappa^2 u$ appartient à $L^2(\Omega)$, en particulier,

$$\Delta u \in L^2([a, L] \times \mathcal{S}^2), \quad \forall L > a > R. \quad (4.35)$$

De la même façon que dans le paragraphe précédent, nous démontrons que $u_{n,m}$ vérifie l'équation différentielle de Bessel sphérique

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_{n,m}}{dr} \right) + (\kappa^2 r^2 - n(n+1)) u_{n,m} = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(R, +\infty). \quad (4.36)$$

L'espace vectoriel engendré par les solutions de cette équation différentielle ordinaire est de dimension deux et la forme générale des termes radiaux du développement modal est donnée par

$$u_{n,m}(r) = a_{n,m} j_n(\kappa r) + b_{n,m} h_n^{(1)}(\kappa r), \quad (4.37)$$

pour tout $r > R$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ avec $|m| \leq n$ tels que $a_{n,m} \neq 0$ et notons

$$I_{n,m}^j = \left(\int_R^{+\infty} |a_{n,m} j_n(\kappa r)|^2 r^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.38a)$$

$$I_{n,m}^h = \left(\int_R^{+\infty} |b_{n,m} h_n^{(1)}(\kappa r)|^2 r^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.38b)$$

$$I_{n,m} = \left(\int_R^{+\infty} |u_{n,m}(r)|^2 r^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.38c)$$

D'une part, puisque $(Y_{n,m})$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathcal{S}^2)$,

$$I_{n,m} \leq \|u\|_{0,\Omega}^2. \quad (4.39)$$

D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n^{(1)}(\kappa r)$ est exponentiellement décroissant lorsque $\Im(\kappa) > 0$ (cf. formule de Rayleigh (4.11)), nous avons

$$I_{n,m}^j \leq I_{n,m} + I_{n,m}^h < +\infty, \quad (4.40)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$. Or, $r \mapsto j_n(\kappa r)$ n'est pour aucun entier naturel n de carré intégrable au voisinage de l'infini, d'où $a_{n,m} = 0$ pour tous $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ et tels que $|m| \leq n$ et les termes radiaux du développement sont donnés par

$$u_{n,m}(r) = b_{n,m} h_n^{(1)}(\kappa r), \quad (4.41)$$

donc, si nous posons $u_{n,m}^\Omega = b_{n,m}$, la décomposition modale proposée dans le théorème 4.5 est justifiée au sens $L^2(\Omega)$.

Remarque 4.8. Par unicité de la décomposition spectrale, le corollaire 2.31 et le théorème 4.5 impliquent que

$$\int_{S^2} u(\mathbf{x}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\hat{\mathbf{x}} = u_{n,m}^\Omega h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|). \quad (4.42)$$

Avec un raisonnement analogue à celui présenté dans le paragraphe précédent, cette décomposition est vérifiée dans $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ pour tout entier s ainsi que dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. En particulier, la série converge uniformément dans tout compact de Ω .

Remarque 4.9. La convergence de la série définie dans C (corollaire 4.6) reprend les arguments des deux discussions sur la convergence des séries en domaine borné et non-borné. La série comprend une partie sortante provenant de la boule de rayon R_1 dont les termes associés sont

$$u_{n,m}^{(1)} S_{n,m} \quad (4.43)$$

et une partie entrante provenant de la boule de rayon R_2 dont les termes associés sont

$$u_{n,m}^{(2)} R_{n,m}. \quad (4.44)$$

4.2 Énoncé et démonstration du lemme d'addition scalaire

Le lemme d'addition scalaire permet d'expliciter la solution fondamentale $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ de l'équation de Helmholtz

$$-\left(\Delta \Phi(\cdot, \mathbf{y}) + \kappa^2 \Phi(\cdot, \mathbf{y})\right) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\}, \quad (4.45)$$

à $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ fixé. Nous supposons que le nombre d'onde κ admet une partie imaginaire strictement positive. Dans ce cas, $\Phi(\cdot, \mathbf{y})$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3) \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\})$, cf. Remarque 3.3.

4.2.1 Énoncé

Lemme 4.10. *Pour tous \mathbf{x}, \mathbf{y} dans \mathbb{R}^3 tels que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| > 0$, nous avons*

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})}. \quad (4.46)$$

Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et convergent uniformément en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) sur tout compact de $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$.

Remarque 4.11. Cette représentation préserve la symétrie de Φ : pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tels que $|\mathbf{y}| > |\mathbf{x}| > 0$,

$$\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) j_n(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}. \quad (4.47)$$

La démonstration de ce lemme suit de la remarque suivante : étant donné $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ fixé, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$, la solution fondamentale $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène

$$\Delta_{\mathbf{x}}\Phi(\cdot, \mathbf{y}) + \kappa^2\Phi(\cdot, \mathbf{y}) = 0, \quad \text{dans } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| \right\}, \quad (4.48)$$

donc, d'après le théorème 4.4, elle se décompose sous la forme

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_{n,m}(\mathbf{y}) R_{n,m}(\mathbf{x}), \quad \text{dans } L^2 \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| \right\} \right), \quad (4.49)$$

où les coefficients $\alpha_{n,m}(\mathbf{y})$ dépendent de \mathbf{y} et sont à déterminer. Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\})$, d'après la section 4.1.2 (paragraphe 1). Le domaine de validité pour cette décomposition est illustré dans la figure 4.1. De plus, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$, la solution fondamentale $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vérifie

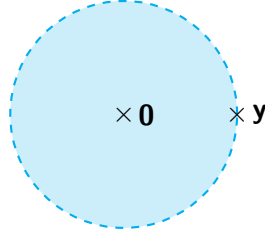


FIGURE 4.1 – Domaine $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}$ bleuté

l'équation de Helmholtz homogène

$$\Delta_{\mathbf{x}}\Phi(\cdot, \mathbf{y}) + \kappa^2\Phi(\cdot, \mathbf{y}) = 0, \quad \text{dans } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| \right\}, \quad (4.50)$$

donc, d'après le théorème 4.5, elle se décompose sous la forme

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \beta_{n,m}(\mathbf{y}) S_{n,m}(\mathbf{x}), \quad \text{dans } L^2 \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| \right\} \right), \quad (4.51)$$

où les coefficients $\beta_{n,m}(\mathbf{y})$ dépendent de \mathbf{y} sont à déterminer. Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ d'après la section 4.1.2 (paragraphe 2). Le domaine de validité pour cette décomposition est illustré dans la figure 4.2.

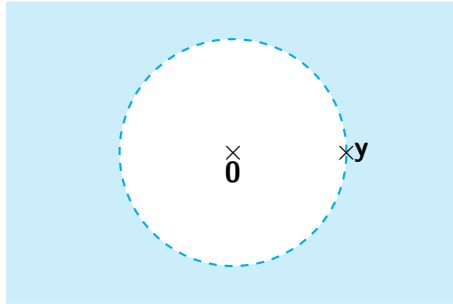


FIGURE 4.2 – Domaine $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$ bleuté

4.2.2 Démonstration de la relation (4.46)

Nous proposons de compléter les éléments de preuves donnés par D. Colton et R. Kress dans [17] à propos du lemme d'addition scalaire. Dans le paragraphe suivant, nous donnerons des précisions sur la convergence de la série qui constituent des résultats nouveaux. Soit \mathbf{y} un élément non-nul de \mathbb{R}^3 . Nous allons caractériser au sens des distributions l'équation $\Delta_{\mathbf{x}}\Phi + \kappa^2\Phi = -\delta_{\mathbf{y}}$ en choisissant une fonction-test particulière à variables séparées

$$\psi_{n,m}(\mathbf{x}) = \overline{j_n(\kappa|\mathbf{x}|)}\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{C}_c^\infty((0, +\infty) \times \mathcal{S}^2), \quad (4.52)$$

à n et m fixés, où j_n désigne la fonction de Bessel d'ordre n , $Y_{n,m}$ la m -ème fonction harmonique sphérique d'ordre n et $\eta_{\mathbf{y}}$ désigne la fonction de troncature (cf. figure 4.3)

$$\eta_{\mathbf{y}} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4.53a)$$

$$r \longmapsto \eta_{\mathbf{y}}(r), \quad (4.53b)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ dans $(0, +\infty)$, à support compact dans $\left(\frac{|\mathbf{y}|}{2}, \frac{3|\mathbf{y}|}{2}\right)$ et vérifie

$$\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}|) = 1 \text{ et } \eta'(|\mathbf{y}|) = 0. \quad (4.54)$$

D'une part, d'après l'équation vérifiée par $\Phi(\cdot, \mathbf{y})$ et la définition de $\psi_{n,m}$, nous avons

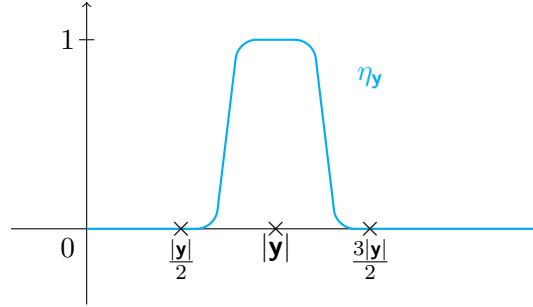


FIGURE 4.3 – Fonction de troncature $\eta_{\mathbf{y}}$

$$\left\langle -\left(\Delta_{\mathbf{x}}\Phi(\cdot, \mathbf{y}) + \kappa^2\Phi(\cdot, \mathbf{y})\right), \psi_{n,m} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \delta_{\mathbf{y}}, \psi_{n,m} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \overline{\psi_{n,m}(\mathbf{y})} = \overline{j_n(\kappa|\mathbf{y}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})}. \quad (*)$$

D'autre part, puisque $\Phi(\cdot, \mathbf{y}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, d'après la définition de la dérivation au sens des distributions et celle de $\psi_{n,m}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle -\left(\Delta_{\mathbf{x}}\Phi + \kappa^2\Phi\right), \psi_{n,m} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|)\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)\overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] d\mathbf{x}, \\ &= - \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|)\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)\overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|)\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)\overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction test est à variables séparées et la fonction $Y_{n,m}$ est une fonction propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami, nous remarquons que le facteur

$$\left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|)\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)\overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right]$$

est proportionnel à $\overline{Y_{n,m}}$. Par ailleurs, la famille constituée des fonctions harmoniques sphériques étant orthogonale, d'après les développements modaux (4.49) et (4.51) de Φ dans les domaines considérés, il vient

$$\begin{aligned} \left\langle -\left(\Delta_{\mathbf{x}}\Phi + \kappa^2\Phi\right), \psi_{n,m} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= - \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}} \left\{ \alpha_{n,m}(\mathbf{y}) R_{n,m}(\mathbf{x}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \right. \\ &\quad \left. \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|) \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] \right\} d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}} \left\{ \beta_{n,m}(\mathbf{y}) S_{n,m}(\mathbf{x}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \right. \\ &\quad \left. \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|) \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Puis, en remplaçant $R_{n,m}$ et $S_{n,m}$ par leur expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\langle -\left(\Delta_{\mathbf{x}}\Phi + \kappa^2\Phi\right), \psi_{n,m} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= -\alpha_{n,m}(\mathbf{y}) \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}} \left\{ j_n(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \right. \\ &\quad \left. \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|) \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] \right\} d\mathbf{x} \\ &\quad - \beta_{n,m}(\mathbf{y}) \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}} \left\{ h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\Delta_{\mathbf{x}} + \kappa^2\right) \right. \\ &\quad \left. \left[j_n(\kappa|\mathbf{x}|) \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right] \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme les fonctions $\mathbf{x} \mapsto j_n(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$ et $\mathbf{x} \mapsto h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$ appartiennent à la classe des fonctions $\{u \in H^1, \Delta u \in L^2\}$ pour chacun des domaines considérés, nous pouvons appliquer les formules de Green (2.52) et (2.51). D'après les équations vérifiées par les fonctions $R_{n,m}$, $S_{n,m}$ et les propriétés de $\eta_{\mathbf{y}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\langle -\left(\Delta_{\mathbf{x}}\Phi + \kappa^2\Phi\right), \psi \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \kappa \beta_{n,m}(\mathbf{y}) \left(h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) j_n'(\kappa|\mathbf{y}|) \int_{|\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. - h_n^{(1)'}(\kappa|\mathbf{y}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \int_{|\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} \right). \end{aligned}$$

D'après l'identité (cf. [17] par exemple)

$$\int_{|\mathbf{x}|=r} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = r^2, \quad (4.55)$$

pour tout $r > 0$, nous déduisons

$$\left\langle -\left(\Delta_{\mathbf{x}}\Phi + \kappa^2\Phi\right), \psi \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \beta_{n,m}(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^2 \left(h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) j_n'(\kappa|\mathbf{y}|) - h_n^{(1)'}(\kappa|\mathbf{y}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \right).$$

Enfin, à l'aide de l'identité du Wronskien (cf. [17] ou [40] par exemple)

$$h_n^{(1)}(t) j_n'(t) - j_n(t) h_n^{(1)'}(t) = \frac{-i}{t^2} \quad (4.56)$$

et de l'équation (*), nous identifions le coefficient $\beta_{n,m}(\mathbf{y})$

$$\beta_{n,m}(\mathbf{y}) = i\kappa j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})}.$$

Nous concluons quant à la convergence de la série, à \mathbf{y} fixé, dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et de même, à \mathbf{x} fixé, dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$. Il reste à démontrer la convergence de la série par rapport aux deux variables; cela fait l'objet du paragraphe suivant.

Remarque 4.12. Par unicité de la décomposition spectrale, d'après le corollaire 2.31 et ce résultat, nous déduisons qu'à \mathbf{y} fixé, pour tout $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$,

$$\int_{S^2} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\hat{\mathbf{x}} = i\kappa h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})}. \quad (4.57)$$

4.2.3 Démonstration de la convergence dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$

Nous introduisons un espace fonctionnel constitué des fonctions L_{loc}^2 sauf dans un voisinage de $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ dont la définition repose sur un espace de fonctions de troncature

$$\Xi = \left\{ \chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^6), \exists \rho_0 > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \rho_0 \implies \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \right\}. \quad (4.58)$$

Nous introduisons alors l'espace fonctionnel

$$L_{*,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^6) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^6), \forall \chi \in \Xi, \chi u \in L^2(\mathbb{R}^6) \right\}. \quad (4.59)$$

La solution fondamentale Φ appartient à la classe des fonctions $L_{*,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^6)$ car elle est de classe \mathcal{C}^∞ dans $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}$. En particulier, pour tous réels $\rho > 0$ et $0 < \varepsilon < \rho$, Φ appartient à $L^2(\Omega_{\rho,\varepsilon})$ où le domaine $\Omega_{\rho,\varepsilon}$ est défini par

$$\Omega_{\rho,\varepsilon} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| < \rho - \varepsilon < \rho + \varepsilon < |\mathbf{y}| \right\}. \quad (4.60)$$

Nous avons besoin d'un résultat intermédiaire à propos de la décomposition spectrale d'une fonction de $L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$.

Proposition 4.13. *Soit $u \in L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$. Alors il existe une suite de nombres complexes $(u_{n,n',m,m'})$ telle que nous ayons*

$$u(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} u_{n,n',m,m'} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}}), \quad \text{dans } L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2), \quad (4.61)$$

où, pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$ et $m, m' \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$ et $|m'| \leq n'$, les coefficients spectraux $u_{n,n',m,m'}$ sont donnés par

$$u_{n,n',m,m'} = \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} u(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})} d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}}. \quad (4.62)$$

Démonstration. La famille constituée des fonctions $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \mapsto \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})$ forme une famille orthogonale de $L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$. Démontrons qu'elle est dense dans $L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$. Soit $u \in L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$ telle que

$$u_{n,n',m,m'} = \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} u(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})} d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} = 0, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, |m| \leq n,$$

et notons

$$u_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) = \int_{\mathcal{S}^2} u(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}.$$

L'application $u_{n,m}$ appartient à $L^2(\mathcal{S}_{\mathbf{y}}^2)$. En effet, nous avons

$$\|u_{n,m}\|_{0,\mathcal{S}_{\mathbf{y}}^2} = \|(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \mapsto u_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}\|_{0,\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} \leq \|u\|_{0,\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2},$$

car l'application $u \mapsto u_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}$ est un projecteur orthogonal. Par ailleurs, remarquons que $u_{n,n',m,m'} = (u_{n,m})_{n',m'}$ d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} u_{n,n',m,m'} &= \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} u(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})} d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathcal{S}^2} \left\{ \int_{\mathcal{S}^2} u(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \right\} \overline{Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})} d\hat{\mathbf{y}} = (u_{n,m})_{n',m'}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathcal{S}^2} u_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \overline{Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})} d\hat{\mathbf{y}} = 0,$$

puis, comme la famille $(Y_{n,m})$ est dense dans $L^2(\mathcal{S}^2)$, il suit que $u \equiv 0$. Donc la famille constituée des fonctions $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \mapsto \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}})$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$. \square

Voyons Φ comme une fonction à deux variables de \mathbb{R}^3 . D'après la proposition précédente, pour presque tous $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$ fixés, il existe une suite de nombres complexes $(\phi_{n,n',m,m'}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|))$ telle que

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \phi_{n,n',m,m'}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}}), \quad \text{dans } L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2),$$

où les coefficients spectraux $\phi_{n,n',m,m'}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$ sont donnés par

$$\phi_{n,n',m,m'}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) = \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n',m'}(\hat{\mathbf{y}}) d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}}, \quad (4.63)$$

pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$, $m, m' \in \mathbb{Z}$ avec $|m| \leq n$ et $|m'| \leq n'$. D'après le théorème de Fubini et la remarque 4.12, pour $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$ fixés, $\phi_{n,n',m,m'} = 0$ sauf pour $n = n'$ et $m = m'$, où

$$\begin{aligned} \phi_{n,m}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) &= \phi_{n,n',m,m'}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) = i\kappa h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \int_{\mathcal{S}^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) d\hat{\mathbf{y}}, \\ &= i\kappa h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) j_n(\kappa|\mathbf{y}|). \end{aligned}$$

Donc, pour presque tous $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$ fixés, la solution fondamentale Φ admet la décomposition suivante :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \phi_{n,m}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}), \quad \text{dans } L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2), \quad (4.64)$$

De plus, pour presque tous $|\mathbf{x}| < \rho - \varepsilon$ et $\rho + \varepsilon < |\mathbf{y}|$ et pour $N \in \mathbb{N}$, si nous notons

$$I_N(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) = \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} \left| \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \phi_{n,m}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \right|^2 d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}},$$

alors d'après l'identité (4.64), la suite $(I_N(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|))$ converge vers 0 pour presque tous $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|$ tels que $|\mathbf{x}| < \rho - \varepsilon$ et $\rho + \varepsilon < |\mathbf{y}|$. En outre, comme la somme tronquée correspond à une projection orthogonale dans $L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$, nous avons

$$I_N(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \leq \int_{\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2} |\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} \in L^1_{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2}((0, \rho - \varepsilon)_{\mathbf{x}} \times (\rho + \varepsilon, +\infty)_{\mathbf{y}}). \quad (4.65)$$

D'après le théorème de Lebesgue, la suite (I_N) converge vers 0 dans $L^1_{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2}((0, \rho - \varepsilon)_{\mathbf{x}} \times (\rho + \varepsilon, +\infty)_{\mathbf{y}})$ donc la solution fondamentale Φ admet la décomposition suivante :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \phi_{n,m}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}), \quad \text{dans } L^2(\Omega_{\rho,\varepsilon}). \quad (4.66)$$

Enfin, à $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ fixé, la solution fondamentale $\Phi(\cdot, \mathbf{y})$ vérifie

$$\Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \kappa^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\}. \quad (4.67)$$

De même, à $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ fixé, la solution fondamentale $\Phi(\mathbf{x}, \cdot)$ vérifie

$$\Delta_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \kappa^2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}\}. \quad (4.68)$$

Ainsi, si nous notons $\Delta_{\mathbf{xy}} = \Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}$ le Laplacien dans \mathbb{R}^6 , la solution fondamentale $\Phi(\cdot, \cdot)$ vérifie

$$\Delta_{\mathbf{xy}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2\kappa^2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \text{dans } \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}. \quad (4.69)$$

À l'aide d'un raisonnement analogue à celui présenté dans le premier paragraphe de la section 4.1.2, comme Φ vérifie l'équation de Helmholtz (4.69), elle la vérifie notamment dans $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$ donc la décomposition (4.46) peut être justifiée dans

$$H_{\text{loc}}^m \left(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\} \right), \quad (4.70)$$

pour tout entier naturel m ainsi que dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ d'après le théorème d'injection 2.2. En particulier, la série ainsi que ses dérivées convergent uniformément en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) dans tout compact de $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$.

Remarque 4.14. Soit \mathcal{O} un domaine (borné ou non-borné) de \mathbb{R}^6 , suffisamment régulier (cf. 2.2). Le théorème d'injection locale dans \mathbb{R}^6 s'écrit

$$H_{\text{loc}}^{k+3+\delta}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathcal{O}), \quad (4.71)$$

pour tout $\delta > 0$. Donc la convergence de la série dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ est justifiée.

Remarque 4.15 (Application du lemme 4.10). Pour tous \mathbf{x}, \mathbf{y} dans \mathbb{R}^3 tels que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| > 0$, nous avons

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \nabla_{\mathbf{y}} \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y})} \right). \quad (4.72)$$

De plus, pour tout $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, il suit

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{p} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \left[\nabla_{\mathbf{y}} \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y})} \right) \cdot \mathbf{p} \right]. \quad (4.73)$$

Enfin, nous avons

$$\nabla_{\mathbf{x}} [\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{p}] = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \nabla_{\mathbf{x}} \left(h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \left[\nabla_{\mathbf{y}} \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y})} \right) \cdot \mathbf{p} \right]. \quad (4.74)$$

Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et convergent uniformément en (\mathbf{x}, \mathbf{y}) sur tout compact de $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$.

Chapitre 5

Lemme d'addition vectoriel

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans un premier temps à la résolution des équations de Maxwell dans des géométries sphériques, bornées ou non-bornées. D'abord, nous déterminons les modes associés aux équations de Maxwell à l'aide des potentiels de Debye [40, 41]. Ensuite, nous justifions les décompositions modales des solutions des équations de Maxwell en construisant de manière explicite un opérateur de résolution linéaire et continu de $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot})$. Nous utilisons la décomposition de Helmholtz-Hodge de l'espace $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ des champs de vecteurs tangents à la sphère Γ présentée dans le paragraphe 2.3.3. Cet espace a notamment été étudié par A. De la Bourdonnaye dans [20]. Dans un second temps, nous nous intéressons au lemme d'addition vectoriel qui donne une représentation modale de la solution fondamentale de l'équation tridimensionnelle de Helmholtz

$$-\Delta(\Phi(\cdot, \mathbf{y})\mathbf{p}) - \kappa^2\Phi(\cdot, \mathbf{y})\mathbf{p} = \mathbf{p} \delta_{\mathbf{y}}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (5.1)$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ sont fixés. Nous complétons les éléments de démonstration proposés par D. Colton et R. Kress [17] et affinons les résultats de convergence associés.

5.1 Décomposition spectrale des solutions des équations de Maxwell dans des géométries sphériques

Nous adoptons les mêmes notations que dans la section 4.1 : D désigne la boule ouverte \mathcal{B}_R de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R . Sa frontière Γ désigne la sphère de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R . Le domaine Ω désigne le complémentaire de \overline{D} dans \mathbb{R}^3 . Le domaine C désigne la couronne délimitée par deux sphères concentriques de rayon respectif $R_1 < R_2$, de frontière $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Nous rappelons que le problème de propagation d'ondes électromagnétiques en régime harmonique, pour un terme source identiquement nul, est décrit à partir des équations du premier ordre de Maxwell homogènes

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + (i\omega\epsilon_0 - \sigma)\mathbf{E} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (5.2a) \quad (5.2b)$$

où $\omega > 0$ désigne la fréquence de l'onde, μ_0 et ϵ_0 désignent la perméabilité et la permittivité du vide et la constante $\sigma > 0$ désigne la conductivité du milieu ambiant. Nous normalisons

les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} et notons

$$\tilde{\mathbf{E}} = \left(\epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{E}, \quad (5.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mu_0^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}, \quad (5.3b)$$

de sorte que les champs $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ vérifient les équations homogènes de Maxwell normalisées

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} - i\kappa \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{H}} + i\kappa \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5.4a)$$

$$\quad (5.4b)$$

Dans ce qui suit, le nombre d'onde κ est constant et donné par

$$\begin{cases} \kappa^2 = \left(\epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu_0 \omega^2, \\ \Im(\kappa) > 0. \end{cases} \quad (5.5a)$$

$$(5.5b)$$

Remarque 5.1. Le nombre complexe κ est défini de manière unique car $\Im(\kappa^2) > 0$ et $\Im(\kappa) > 0$ impliquent $\Re(\kappa) > 0$.

L'équation du second ordre de Maxwell homogène mettant en jeu le champ électrique normalisé $\tilde{\mathbf{E}}$ est donnée par

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} - \kappa^2 \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Il est alors possible de retrouver l'expression du champ magnétique normalisé $\tilde{\mathbf{H}}$ grâce à l'équation (5.4a).

5.1.1 Potentiel de Debye et solutions élémentaires

L'équation de Helmholtz et les équations de Maxwell s'avèrent être étroitement reliées. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\Upsilon)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans un domaine *régulier* Υ (borné ou non-borné). Le champ de vecteurs \mathbf{u} , appelé *potentiel de Debye* [40] et défini par

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot} (u\mathbf{x}), \quad (5.7)$$

vérifie l'équation de Maxwell du second ordre $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \kappa^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ dans Υ . En effet, puisque $\mathbf{rot} \mathbf{rot} = -\Delta + \nabla(\operatorname{div})$, $\operatorname{div} \mathbf{rot} = 0$ et $\mathbf{rot}(\Delta) = \Delta(\mathbf{rot})$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \kappa^2 \mathbf{u} &= -\Delta(\mathbf{rot} (u\mathbf{x})) + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{rot} (u\mathbf{x})) - \kappa^2 \mathbf{rot} (u\mathbf{x}), \\ &= -\mathbf{rot} ((\Delta u + \kappa^2 u)\mathbf{x} + 2\nabla u), \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

car u solution de l'équation homogène de Helmholtz et $\mathbf{rot} \nabla = \mathbf{0}$. Suite à cette remarque, nous définissons les *fonctions d'onde vectorielles* [17, 40] [46, chapitre 1.4.1]

$$\mathbf{R}_{n,m}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{rot} (\mathbf{x} R_{n,m}(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{n,m}^x(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{R}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

et

$$\mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{rot} (\mathbf{x} S_{n,m}(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \quad (5.9)$$

où les fonctions $R_{n,m}$ et $S_{n,m}$ désignent les modes associés à l'équation de Helmholtz scalaire, pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et $m = -n, \dots, n$, cf. Théorème 4.3.

Théorème 5.2. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ avec $|m| \leq n$, les champs de vecteurs $\mathbf{R}_{n,m}^t$ et $\mathbf{R}_{n,m}^x$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ et vérifient l'équation de Maxwell homogène du second ordre*

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (5.10)$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^$ et $m \in \mathbb{Z}$ avec $|m| \leq n$, les champs de vecteurs $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^x$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$ et vérifient l'équation de Maxwell homogène du second ordre*

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}). \quad (5.11)$$

Démonstration. Puisque $\mathbf{R}_{n,m}$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans \mathbb{R}^3 , d'après la définition du potentiel de Debye, $\mathbf{R}_{n,m}^t$ vérifie l'équation du second ordre de Maxwell homogène [40]. Nous utilisons la même idée pour $\mathbf{S}_{n,m}^t$. \square

Remarque 5.3. Lorsque $\Im(\kappa) > 0$ les champs de vecteurs $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^x$ sont exponentiellement décroissantes à l'infini, voir la formule 4.11.

Après calculs, les fonctions d'onde vectorielles admettent les expressions suivantes :

$$\mathbf{R}_{n,m}^t(\mathbf{x}) = j_n(\kappa|\mathbf{x}|) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) = h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.12b)$$

$$\mathbf{R}_{n,m}^x(\mathbf{x}) = \frac{n(n+1)}{i\kappa|\mathbf{x}|} \mathbf{R}_{n,m}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{i\kappa|\mathbf{x}|} (j_n(\kappa|\mathbf{x}|) + \kappa|\mathbf{x}| j_n'(\kappa|\mathbf{x}|)) \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.12c)$$

$$\mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) = \frac{n(n+1)}{i\kappa|\mathbf{x}|} \mathbf{S}_{n,m}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{i\kappa|\mathbf{x}|} (h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) + \kappa|\mathbf{x}| h_n^{(1)'}(\kappa|\mathbf{x}|)) \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.12d)$$

où $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ et $\mathbf{rot}_{S^2} = \nabla_{S^2} \times \mathbf{e}_r$. Ces notations sont en accord avec la nature des champs de base ; $\mathbf{R}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^t$ sont des champs tangents à la sphère, $\mathbf{R}_{n,m}^x$ et $\mathbf{S}_{n,m}^x$ admettent une partie radiale. Nous énonçons les décompositions modales des solutions des équations de Maxwell que nous justifierons dans les paragraphes suivants. Dans la suite, nous démontrerons des résultats plus précis sur la convergence des séries associées aux solutions des problèmes intérieur et extérieur de Maxwell.

Remarque 5.4. La famille constituée des fonctions $\mathbf{R}_{n,m}^t$ et $\mathbf{R}_{n,m}^x$ forme une famille orthogonale de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$. Si $\Im(\kappa) > 0$, la famille constituée des fonctions $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^x$ forme une famille orthogonale de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Théorème 5.5. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ une solution de l'équation du second ordre de Maxwell homogène $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans D . Alors il existe deux suites de complexes $E_{n,m}^{(1),D}$ et $E_{n,m}^{(2),D}$ telles que \mathbf{E} admette la représentation suivante*

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),D} \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(2),D} \mathbf{R}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D). \quad (5.13)$$

De plus, le champ magnétique normalisé $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ associé admet la représentation suivante

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -E_{n,m}^{(2),D} \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(1),D} \mathbf{R}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D). \quad (5.14)$$

Ces séries ainsi que leurs dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(D)$ et convergent uniformément sur tout compact de D .

Théorème 5.6. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ une solution de l'équation du second ordre de Maxwell homogène $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans Ω . Alors il existe deux suites de complexes $E_{n,m}^{(1),\Omega}$ et $E_{n,m}^{(2),\Omega}$ telles que \mathbf{E} admette la représentation suivante*

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),\Omega} \mathbf{S}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(2),\Omega} \mathbf{S}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega). \quad (5.15)$$

De plus, le champ magnétique normalisé $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ associé admet la représentation suivante

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -E_{n,m}^{(2),\Omega} \mathbf{S}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(1),\Omega} \mathbf{S}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega). \quad (5.16)$$

Ces séries ainsi que leurs dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et convergent uniformément sur tout compact de Ω .

Théorème 5.7. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, C)$ une solution de l'équation du second ordre de Maxwell homogène $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans C . Alors il existe quatre suites de complexes $E_{n,m}^{(1),C}$, $E_{n,m}^{(2),C}$, $E_{n,m}^{(3),C}$ et $E_{n,m}^{(4),C}$ telles que \mathbf{E} admette la représentation suivante*

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),C} \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(2),C} \mathbf{R}_{n,m}^x + E_{n,m}^{(3),C} \mathbf{S}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(4),C} \mathbf{S}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}, C). \quad (5.17)$$

De plus, le champ magnétique normalisé $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, C)$ associé admet la représentation suivante

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n -E_{n,m}^{(2),C} \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(1),D} \mathbf{R}_{n,m}^x - E_{n,m}^{(4),C} \mathbf{S}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(3),C} \mathbf{S}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}, C). \quad (5.18)$$

Ces séries ainsi que leurs dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(C)$ et convergent uniformément sur tout compact de C .

5.1.2 Caractère générateur

Munissons l'équation du second ordre de Maxwell homogène (5.6) de la condition aux limites sur Γ

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\lambda} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (5.19)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de D et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. La frontière Γ désigne la sphère de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R , c'est à la fois la frontière de la boule D et celle du domaine extérieur Ω . En tenant compte de la décomposition de Helmholtz des champs de vecteurs de $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ tangents à Γ (cf. section 2.3) et la base spectrale de l'espace des champs tangents (cf. section 2.4.4), nous pouvons affirmer que la donnée de bord se décompose sous la forme

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{a_{n,m}}{n(n+1)} \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{b_{n,m}}{n(n+1)} \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \quad (5.20)$$

pour $\mathbf{x} \in \Gamma$, où les coefficients spectraux sont donnés par

$$a_{n,m} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \nabla_{S^2} Y_{n,m} \rangle_\Gamma \quad \text{et} \quad b_{n,m} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m} \rangle_\Gamma. \quad (5.21)$$

En domaine borné

Proposition 5.8. *Il existe un opérateur de résolution \mathcal{S}_{int}*

$$\mathcal{S}_{\text{int}} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}(\text{rot}, D) \times \mathbf{H}(\text{rot}, D) \quad (5.22a)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \text{ donné par (5.20)} \longmapsto (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ donnés par (5.13) - (5.14)} \quad (5.22b)$$

linéaire et continu de $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}(\text{rot}, D) \times \mathbf{H}(\text{rot}, D)$.

Dans ce qui suit, nous proposons une démonstration constructive de cette proposition.

(i) Supposons que $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$, pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$. La solution de l'équation $\text{rot rot } \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans D associée à $\boldsymbol{\lambda}$ est donnée par

$$\frac{1}{j_n(\kappa R)} \mathbf{R}_{n,m}^t. \quad (5.23)$$

En effet, ce champ de vecteurs vérifie l'équation homogène du second ordre de Maxwell par homogénéité.

Remarque 5.9. Pour tout $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$ le dénominateur $j_n(\kappa R)$ ne s'annule jamais, voir l'annexe C.

De plus,

$$\gamma_\times \left[\frac{1}{j_n(\kappa R)} \mathbf{R}_{n,m}^t \right] = \frac{1}{j_n(\kappa R)} \mathbf{n} \times \mathbf{R}_{n,m}^t|_\Gamma = \mathbf{n} \times \text{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \left(\frac{\cdot}{R} \right) = \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.24)$$

Par ailleurs, nous déduisons une contribution à la décomposition du champ magnétique avec

$$\frac{1}{i\kappa j_n(\kappa R)} \text{rot } \mathbf{R}_{n,m}^t = \frac{1}{j_n(\kappa R)} \mathbf{R}_{n,m}^x. \quad (5.25)$$

(ii) Supposons que $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \text{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$, pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$. La solution de l'équation $\text{rot rot } \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans D associée à $\boldsymbol{\lambda}$ est donnée par

$$\frac{i\kappa R}{j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R)} \mathbf{R}_{n,m}^x. \quad (5.26)$$

En effet, ce champ de vecteurs vérifie l'équation homogène du second ordre de Maxwell par homogénéité.

Remarque 5.10. Pour tout $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$ le dénominateur $j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R)$ ne s'annule jamais, voir l'annexe C.

De plus,

$$\gamma_\times \left[\frac{i\kappa R}{j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R)} \mathbf{R}_{n,m}^x \right] = \frac{i\kappa R}{j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R)} \mathbf{n} \times \mathbf{R}_{n,m}^x|_\Gamma, \quad (5.27a)$$

$$= -\mathbf{n} \times \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \left(\frac{\cdot}{R} \right), \quad (5.27b)$$

$$= \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.27c)$$

Par ailleurs, nous déduisons une contribution à la décomposition du champ magnétique avec

$$\frac{R}{j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R)} \text{rot } \mathbf{R}_{n,m}^x = -\frac{i\kappa R}{j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R)} \mathbf{R}_{n,m}^t. \quad (5.28)$$

Nous construisons ainsi un opérateur de résolution du problème intérieur, linéaire et continu, noté \mathcal{S}_{int} , défini comme suit :

$$\mathcal{S}_{\text{int}} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D) \quad (5.29a)$$

$$\lambda \text{ donné par (5.20)} \longmapsto (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ donnés par (5.13) - (5.14)} \quad (5.29b)$$

où pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$, les coefficients des séries (5.13) et (5.14) sont donnés par

$$E_{n,m}^{(1),D} = \frac{a_{n,m}}{n(n+1)j_n(\kappa R)} \quad \text{et} \quad E_{n,m}^{(2),D} = \frac{i\kappa R b_{n,m}}{n(n+1)(j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R))}. \quad (5.30)$$

En domaine extérieur

Proposition 5.11. *Il existe un opérateur de résolution \mathcal{S}_{ext}*

$$\mathcal{S}_{\text{ext}} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \quad (5.31a)$$

$$\lambda \text{ donné par (5.20)} \longmapsto (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ donnés par (5.15) - (5.16)} \quad (5.31b)$$

linéaire et continu de $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Nous suivons la même démarche que celle proposée dans la démonstration de la proposition 5.8.

(i) Supposons que $\lambda(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$, pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$. La solution de l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans Ω associée à λ est donnée par

$$-\frac{1}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \mathbf{S}_{n,m}^t. \quad (5.32)$$

En effet, ce champ de vecteurs vérifie l'équation homogène du second ordre de Maxwell par homogénéité.

Remarque 5.12. Pour tout $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$ le dénominateur $h_n^{(1)}(\kappa R)$ ne s'annule jamais, voir l'annexe C.

De plus,

$$\gamma_\times \left[-\frac{1}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \mathbf{S}_{n,m}^t \right] = \frac{1}{h_n^{(1)}(\kappa R)} (-\mathbf{n}) \times \mathbf{S}_{n,m}^t|_\Gamma = -\mathbf{n} \times \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \left(\frac{\cdot}{R} \right) = \lambda, \quad (5.33)$$

en tenant compte de l'orientation de la normale. Par ailleurs, nous déduisons une contribution à la décomposition du champ magnétique avec

$$-\frac{1}{i\kappa h_n^{(1)}(\kappa R)} \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^t = -\frac{1}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \mathbf{S}_{n,m}^x. \quad (5.34)$$

(ii) Supposons que $\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$, pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$. La solution de l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans Ω associée à λ est donnée par

$$-\frac{i\kappa R}{h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R)} \mathbf{S}_{n,m}^x. \quad (5.35)$$

En effet, ce champ de vecteurs vérifie l'équation homogène du second ordre de Maxwell par homogénéité.

Remarque 5.13. Pour tout $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$ le dénominateur $h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R)$ ne s'annule jamais, voir l'annexe C.

De plus,

$$\gamma \times \left[-\frac{i\kappa R}{h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R)} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}} \right] = \frac{i\kappa R}{h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R)} (-\mathbf{n}) \times \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}}|_{\Gamma}, \quad (5.36a)$$

$$= \mathbf{n} \times \nabla_{S^2} Y_{n,m} \left(\frac{\cdot}{R} \right), \quad (5.36b)$$

$$= \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.36c)$$

Par ailleurs, nous déduisons une contribution à la décomposition du champ magnétique avec

$$-\frac{R}{h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R)} \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}} = \frac{i\kappa R}{h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R)} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}}. \quad (5.37)$$

Nous construisons ainsi un opérateur de résolution du problème extérieur, linéaire et continu, noté \mathcal{S}_{ext} , défini comme suit :

$$\mathcal{S}_{\text{ext}} : \quad \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \quad (5.38a)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \text{ donné par (5.20)} \longmapsto (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ donnés par (5.15) - (5.16)} \quad (5.38b)$$

où pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$, les coefficients des séries (5.15) et (5.16) sont donnés par

$$E_{n,m}^{(1),\Omega} = -\frac{a_{n,m}}{n(n+1)h_n^{(1)}(\kappa R)} \quad \text{et} \quad E_{n,m}^{(2),\Omega} = -\frac{i\kappa R b_{n,m}}{n(n+1)(h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R))}. \quad (5.39)$$

Remarque 5.14. Les séries (5.17) et (5.18) s'obtiennent en combinant les arguments présentés pour les problèmes intérieur et extérieur : la décomposition du champ électrique comprend une partie sortante qui provient de la boule de rayon R_1 dont les termes associés sont

$$E_{n,m}^{(3),C} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}} \quad \text{et} \quad E_{n,m}^{(4),C} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}} \quad (5.40)$$

et une partie entrante qui provient de la boule de rayon R_2 dont les termes associés sont

$$E_{n,m}^{(1),C} \mathbf{R}_{n,m}^{\mathbf{t}} \quad \text{et} \quad E_{n,m}^{(2),C} \mathbf{R}_{n,m}^{\mathbf{x}}. \quad (5.41)$$

5.1.3 Convergence de la série

Rappelons que le problème est le suivant : nous recherchons \mathbf{E} et \mathbf{H} dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ ou $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tels que

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} = 0, & \text{dans } D \text{ ou } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E} = 0, & \text{dans } D \text{ ou } \Omega, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\lambda} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (5.42a)$$

$$\text{dans } D \text{ ou } \Omega, \quad (5.42b)$$

$$\text{sur } \Gamma, \quad (5.42c)$$

où D désigne la boule ouverte \mathcal{B}_R et $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(D)$

Proposition 5.15. *Les décompositions modales de \mathbf{E} et \mathbf{H} données par les séries (5.13) et (5.14) convergent dans $\mathcal{C}^\infty(D)$.*

La convergence des séries (5.13) et (5.14) dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ découle de la continuité de l'opérateur de résolution \mathcal{S}_{int} . En effet, la trace tangentielle se décompose en une somme hilbertienne

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{a_{n,m}}{n(n+1)} \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{b_{n,m}}{n(n+1)} \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (5.43)$$

Pour chacun des termes de la série, nous avons déterminé un opérateur de résolution explicite linéaire et continu, cf. section 5.1.2. D'après la remarque 5.4, ces termes sont également deux à deux orthogonaux. D'après le théorème de Parseval, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|_{0,D}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left| E_{n,m}^{(1),D} \right|^2 \|\mathbf{R}_{n,m}^t\|_{0,D}^2 + \left| E_{n,m}^{(2),D} \right|^2 \|\mathbf{R}_{n,m}^x\|_{0,D}^2, \\ \|\mathbf{rot} \mathbf{E}\|_{0,D}^2 &= \|i\kappa \mathbf{H}\|_{0,D}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left| \kappa E_{n,m}^{(2),D} \right|^2 \|\mathbf{R}_{n,m}^t\|_{0,D}^2 + \left| \kappa E_{n,m}^{(1),D} \right|^2 \|\mathbf{R}_{n,m}^x\|_{0,D}^2, \end{aligned}$$

et par continuité de l'opérateur de résolution, il suit

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)} \leq c \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}, \quad (5.44)$$

donc la série (5.13) converge dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$. De même, la série (5.14) converge dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$. En outre, puisque la série (5.13) converge dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$, elle converge dans $\mathbf{L}^2(D)$ qui est complet, donc son reste de Cauchy converge vers $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{L}^2(D)$, c'est-à-dire

$$S_{N_1, N_2} = \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),D} \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(2),D} \mathbf{R}_{n,m}^x \xrightarrow{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \mathbf{0}, \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(D). \quad (5.45)$$

En appliquant le Laplacien au reste de Cauchy, puisque $\mathbf{R}_{n,m}^t$ et $\mathbf{R}_{n,m}^x$ vérifient l'équation de Helmholtz vectorielle (car $\text{div} \mathbf{R}_{n,m}^t = 0$, $\text{div} \mathbf{R}_{n,m}^x = 0$ et $\Delta = -\mathbf{rot} \mathbf{rot} + \nabla \text{div}$), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta(S_{N_1, N_2}) &= \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),D} \Delta \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(2),D} \Delta \mathbf{R}_{n,m}^x, \\ &= -\kappa^2 S_{N_1, N_2}, \\ &\xrightarrow{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \mathbf{0}, \end{aligned} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(D),$$

d'après l'expression (5.45). Donc la série converge dans $\mathbf{L}^2(\Delta, D) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D), \Delta \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D)\}$ et par conséquent

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),D} \mathbf{R}_{n,m}^t + E_{n,m}^{(2),D} \mathbf{R}_{n,m}^x, \quad \text{dans } \mathbf{H}_{\text{loc}}^2(D). \quad (5.46)$$

En particulier, l'injection continue de $\mathbf{H}_{\text{loc}}^2(D)$ dans $\mathcal{C}^0(D)$ implique la convergence uniforme (en norme \mathbf{L}^∞) de la série dans tout compact strictement inclus dans l'ouvert D . Enfin, grâce à la proposition B.9 et à une technique de Bootstrap, nous pouvons démontrer que cette décomposition est vraie dans $\mathbf{H}_{\text{loc}}^m(D)$, pour tout entier m puis dans $\mathcal{C}^\infty(D)$ d'après le théorème d'injection 2.2.

Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Proposition 5.16. *Les décompositions modales de \mathbf{E} et \mathbf{H} données par les séries (5.15) et (5.16) convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

La convergence des séries (5.15) et (5.16) dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ découle de la continuité de l'opérateur de résolution \mathcal{S}_{ext} . En effet, la trace tangentielle se décompose en une somme hilbertienne

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{a_{n,m}}{n(n+1)} \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{b_{n,m}}{n(n+1)} \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (5.47)$$

Pour chacun des termes de la série, nous avons déterminé un opérateur de résolution explicite linéaire et continu, cf. section 5.1.2. D'après la remarque 5.4, ces termes sont également deux à deux orthogonaux. D'après le théorème de Parseval, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left| E_{n,m}^{(1),\Omega} \right|^2 \|\mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}}\|_{0,\Omega}^2 + \left| E_{n,m}^{(2),\Omega} \right|^2 \|\mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}}\|_{0,\Omega}^2, \\ \|\mathbf{rot} \mathbf{E}\|_{0,\Omega}^2 &= \|i\kappa \mathbf{H}\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left| \kappa E_{n,m}^{(2),\Omega} \right|^2 \|\mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}}\|_{0,\Omega}^2 + \left| \kappa E_{n,m}^{(1),\Omega} \right|^2 \|\mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}}\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

et par continuité de l'opérateur de résolution, il suit

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \leq c \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}, \quad (5.48)$$

donc la série (5.15) converge dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. De même, la série (5.16) converge dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. De manière analogue au paragraphe précédent, nous pouvons démontrer que

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{n,m}^{(1),\Omega} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}} + E_{n,m}^{(2),\Omega} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}}, \quad \text{dans } \mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\Omega). \quad (5.49)$$

En particulier, l'injection continue de $\mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$ implique la convergence uniforme (en norme \mathbf{L}^∞) de la série dans tout compact strictement inclus dans l'ouvert Ω . Enfin, grâce à la proposition B.9 et à une technique de Bootstrap, nous pouvons démontrer que cette décomposition est vraie dans $\mathbf{H}_{\text{loc}}^m(\Omega)$, pour tout entier m puis dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ d'après le théorème d'injection 2.2.

5.2 Énoncé et démonstration du lemme d'addition vectoriel

Le lemme d'addition vectoriel associé à la solution fondamentale Φ de l'équation de Helmholtz permet d'obtenir une représentation modale de la solution des équations de Maxwell homogènes. Il met en jeu le gradient des fonctions d'onde scalaires ainsi que les fonctions d'onde vectorielles qui ont la particularité de vérifier les identités suivantes :

$$\mathbf{rot} \mathbf{R}_{n,m}^{\mathbf{t}} = i\kappa \mathbf{R}_{n,m}^{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}} = i\kappa \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}}, \quad (5.50a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{R}_{n,m}^{\mathbf{x}} = -i\kappa \mathbf{R}_{n,m}^{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{x}} = -i\kappa \mathbf{S}_{n,m}^{\mathbf{t}}, \quad (5.50b)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$.

5.2.1 Énoncé

Lemme 5.17. Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tels que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| > 0$, la solution de l'équation (5.1) vérifie

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\text{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\text{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \text{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Pour tout élément non-nul \mathbf{y} de \mathbb{R}^3 fixé, cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et convergent uniformément sur tout compact de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$.

Dans [17], D. Colton et R. Kress donnent des éléments de démonstration de ce lemme lorsque κ est un nombre réel. Dans ce cas, le lemme d'addition vectoriel s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} \left(\overline{\mathbf{R}_{n,m}^t(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{i\kappa}{n(n+1)} \left(\overline{\mathbf{R}_{n,m}^x(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \overline{\mathbf{R}_{n,m}(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Dans ce qui suit, nous proposons une démonstration complète et détaillée de la formule (5.51) et nous affinons les résultats de convergence associés. Soient $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ fixés. Il s'agit de résoudre le problème du second ordre de Maxwell dans l'espace libre qui consiste à chercher $\mathbf{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = i\kappa \mathbf{p} \delta_{\mathbf{y}} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3), \quad (5.53)$$

où $\delta_{\mathbf{y}}$ désigne la masse de Dirac en \mathbf{y} . D'après la proposition 3.23, une solution de cette équation est donnée par

$$\mathbf{E}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = i\kappa \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} - \frac{1}{i\kappa} \nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{x}}(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}), \quad (5.54)$$

car $G * \mathbf{p} \delta_{\mathbf{y}} = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}$.

Remarque 5.18. Le champ $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ admet une singularité en \mathbf{y} , c'est pourquoi nous recherchons $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Toutefois, le champ $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ est de classe \mathcal{C}^∞ en dehors d'un voisinage de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|\}$ car il vérifie l'équation du second ordre de Maxwell homogène et est à divergence nulle.

De la relation (5.54), nous déduisons que

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{E}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\kappa^2} \nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{x}}(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}). \quad (5.55)$$

Commençons par le second terme. Puisque nous avons l'identité,

$$-\frac{1}{\kappa^2} \nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{x}}(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}) = \frac{1}{\kappa^2} \nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{y}}(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}) = \frac{1}{\kappa^2} \nabla_{\mathbf{x}} [\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{p}], \quad (5.56)$$

alors d'après la remarque 4.15, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$,

$$-\frac{1}{\kappa^2} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p}) = \frac{i}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\nabla \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \mathbf{p} \right] \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}). \quad (5.57)$$

Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et convergent uniformément sur tout compact de $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$.

Intéressons nous à présent au premier terme $(\frac{1}{i\kappa} \mathbf{E}_{\mathbf{y}})$. À $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ fixé, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$, le champ électrique $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ vérifie l'équation homogène du second ordre de Maxwell

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\mathbf{y}} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}, \quad (5.58)$$

donc, d'après la remarque 5.18 et le théorème 5.5 il admet la décomposition suivante

$$\mathbf{E}_{\mathbf{y}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) \mathbf{R}_{n,m}^t + \alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) \mathbf{R}_{n,m}^x \right\}, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathcal{B}_\rho), \quad (5.59)$$

pour tout $\rho < |\mathbf{y}|$, où les coefficients $\alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$ dépendent de \mathbf{y} et vont être déterminés. Cette série ainsi que ses dérivées convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\})$ d'après la section 5.1.3 (paragraphe 1) et convergent uniformément sur tout compact de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}$. De plus, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$, le champ électrique $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ vérifie

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\mathbf{y}} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}, \quad (5.60)$$

donc, d'après la remarque 5.18 et le théorème 5.6, il se décompose sous la forme

$$\mathbf{E}_{\mathbf{y}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) \mathbf{S}_{n,m}^t + \beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) \mathbf{S}_{n,m}^x \right\}, \quad \text{dans } \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_\rho}), \quad (5.61)$$

pour tout $\rho > |\mathbf{y}|$, où les coefficients $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$ dépendent de \mathbf{y} vont être déterminés. Cette série ainsi que ses dérivées convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et convergent uniformément sur tout compact de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\}$, d'après la section 5.1.3 (paragraphe 2). Il nous reste à démontrer que les coefficients $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$ coïncident avec les coefficients de la représentation donnée par le lemme d'addition vectoriel.

5.2.2 Identification des coefficients $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$

Il s'agit de d'identifier les coefficients $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$ en évaluant le crochet de dualité au sens des distributions entre $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = i\kappa \mathbf{p} \delta_{\mathbf{y}}$ et deux fonctions-test particulières définies comme suit :

$$\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x}) = \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) \overline{j_n(\kappa|\mathbf{x}|)} \operatorname{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{C}_c^\infty((0, +\infty) \times \mathcal{S}^2), \quad (5.62)$$

$$\psi_{n,m}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)}{i\kappa} \operatorname{rot} \left[\overline{j_n(\kappa|\mathbf{x}|)} \operatorname{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right] \in \mathcal{C}_c^\infty((0, +\infty) \times \mathcal{S}^2), \quad (5.63)$$

à $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$ fixés, où $\eta_{\mathbf{y}}$ désigne la fonction de troncature définie au début de la section 4.2.2 (cf. figure (4.3)). D'une part, d'après l'équation vérifiée par $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ et les propriétés de $\eta_{\mathbf{y}}$, nous avons

$$\left\langle \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\mathbf{y}} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\mathbf{y}}, \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = i\kappa \left\langle \mathbf{p} \delta_{\mathbf{y}}, \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = i\kappa j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \operatorname{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p}, \quad (*)$$

$$\left\langle \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\mathbf{y}} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\mathbf{y}}, \psi_{n,m}^{(2)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = i\kappa \left\langle \mathbf{p} \delta_{\mathbf{y}}, \psi_{n,m}^{(2)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \operatorname{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \operatorname{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p}. \quad (**)$$

Identification de $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$

Le coefficient $\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ est identifié à l'aide de la fonction-test $\psi_{n,m}^{(1)}$. D'après la définition de la dérivation au sens des distributions et l'identité (5.54), nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{rot rot E}_y - \kappa^2 \mathbf{E}_y, \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \mathbf{E}_y, \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle, \\ &= i\kappa \left\langle \Phi(\cdot, \mathbf{y}) \mathbf{p}, \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &\quad - \frac{1}{i\kappa} \left\langle \Phi(\cdot, \mathbf{y}) \mathbf{p}, \nabla \operatorname{div} \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Comme $\Phi(\cdot, \mathbf{y}) \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$, le crochet de dualité précédent peut s'écrire sous la forme d'une intégrale et

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{rot rot E}_y - \kappa^2 \mathbf{E}_y, \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ i\kappa \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i\kappa} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \nabla \operatorname{div} \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} \right\} d\mathbf{x}, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| - \varepsilon\}} \left\{ i\kappa \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{i\kappa} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \nabla \operatorname{div} \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} \right\} d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| + \varepsilon\}} \left\{ i\kappa \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{i\kappa} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \nabla \operatorname{div} \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} \right\} d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Nous cherchons à faire intervenir \mathbf{E}_y dans les intégrales précédentes, qui est \mathbf{L}^2 hors d'un voisinage de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|\}$. Pour cela, notons

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) &= \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| - \varepsilon\}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \nabla \operatorname{div} \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \\ J_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) &= \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| + \varepsilon\}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \nabla \operatorname{div} \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

et considérons ε tel que

$$\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) = 1, \quad \forall |\mathbf{x}| \in [|\mathbf{y}| - 2\varepsilon, |\mathbf{y}| + 2\varepsilon].$$

Comme $\Phi(\cdot, \mathbf{y}) \mathbf{p}$ est de classe \mathcal{C}^∞ en dehors d'un voisinage de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|\}$, nous appliquons deux fois la formule de Green (2.51) et nous obtenons

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) &= \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| - \varepsilon\}} \nabla \operatorname{div} (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p}) \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \\ J_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) &= \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| + \varepsilon\}} \nabla \operatorname{div} (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p}) \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où les termes de bords sont nuls car

$$\left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}} = \mathbf{0}, \quad \text{pour } |\mathbf{y}| - 2\varepsilon < |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| + 2\varepsilon.$$

D'où, en injectant ces expressions dans la limite explicitée plus haut et en utilisant l'expression (5.54) de \mathbf{E}_y , il suit

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{rot rot} \mathbf{E}_y - \kappa^2 \mathbf{E}_y, \psi_{n,m}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| - \varepsilon\}} \mathbf{E}_y(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| + \varepsilon\}} \mathbf{E}_y(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right\}, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ I_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) + I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) &= \int_{\{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| - \varepsilon\}} \mathbf{E}_y(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \\ I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) &= \int_{\{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| + \varepsilon\}} \mathbf{E}_y(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{rot rot} - \kappa^2 \right) \overline{\psi_{n,m}^{(1)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme \mathbf{E}_y est de classe \mathcal{C}^∞ en dehors d'un voisinage de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|\}$ (voir la remarque 5.18), nous pouvons appliquer deux fois la formule de Green (2.60) sur $I_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y})$ et $I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y})$ et, d'après l'équation vérifiée par \mathbf{E}_y dans les domaines considérés, nous obtenons

$$I_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \left\{ \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \gamma_\times (\mathbf{rot} \psi_{n,m}^{(1)}) + \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \gamma_\times \psi_{n,m}^{(1)} \right\} d\mathbf{s}_x, \quad (5.64a)$$

$$I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) = - \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \left\{ \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \gamma_\times (\mathbf{rot} \psi_{n,m}^{(1)}) + \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \gamma_\times \psi_{n,m}^{(1)} \right\} d\mathbf{s}_x, \quad (5.64b)$$

où γ_t désigne la trace tangentielle (ne dépend pas de la normale), $\gamma_\times = \mathbf{e}_r \times \gamma_t$, $\Gamma_\varepsilon^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| - \varepsilon\}$ et $\Gamma_\varepsilon^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| + \varepsilon\}$. Des décompositions (5.59) et (5.61) et des expressions développées des modes (5.12a)-(5.12d), nous déduisons une décomposition des traces tangentielles $\gamma_t \mathbf{E}_y$ et $\gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y)$:

$$\begin{aligned} \gamma_t \mathbf{E}_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})}{i\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \\ &\quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_\varepsilon^-), \quad (5.65a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t \mathbf{E}_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})}{i\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)} [h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) h_n^{(1)'}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \\ &\quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_\varepsilon^+), \quad (5.65b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ -\alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})}{i\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \\ &\quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_\varepsilon^-), \quad (5.65c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t(\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) = & i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ -\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right. \\ & \left. + \frac{\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})}{i\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)} \left[h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) h_n^{(1)'}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \right] \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \\ & \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma_{\varepsilon}^+ \right). \quad (5.65d) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la fonction de troncature $\eta_{\mathbf{y}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| - \varepsilon) &= 1, & \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| + \varepsilon) &= 1, \\ \nabla \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| - \varepsilon) &= 0, & \nabla \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| + \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Alors nous avons

$$\mathbf{e}_r \times \overline{\psi_{n,m}^{(1)}}(\mathbf{x}) = j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\varepsilon}^-, \quad (5.66a)$$

$$\mathbf{e}_r \times \overline{\psi_{n,m}^{(1)}}(\mathbf{x}) = j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\varepsilon}^+, \quad (5.66b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{rot} \overline{\psi_{n,m}^{(1)}}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{|\mathbf{y}| - \varepsilon} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\varepsilon}^-, \quad (5.66c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{rot} \overline{\psi_{n,m}^{(1)}}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{|\mathbf{y}| + \varepsilon} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\varepsilon}^+. \quad (5.66d) \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (5.66), il suit que

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^{\text{int}}(\mathbf{y}) &= -\frac{1}{|\mathbf{y}| - \varepsilon} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} \\ &\quad + j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-} \gamma_t(\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \quad (5.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^{\text{ext}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{|\mathbf{y}| + \varepsilon} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} \\ &\quad - j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} \gamma_t(\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}. \quad (5.68) \end{aligned}$$

De plus, d'après les expressions (5.65), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} &= \alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-} |\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \\ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-} \gamma_t(\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} &= \frac{\alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}| - \varepsilon} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \\ &\quad \int_{\Gamma_{\varepsilon}^-} |\nabla_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \\ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} &= \beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} |\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \\ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} \gamma_t(\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} &= \frac{\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}| + \varepsilon} [h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) h_n^{(1)'}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \\ &\quad \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} |\nabla_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\int_{\{|\mathbf{x}|=r\}} |\nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}|^2 \, d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = \int_{\{|\mathbf{x}|=r\}} |\mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}|^2 \, d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = r^2 n(n+1), \quad (5.69)$$

et en injectant les expressions précédentes dans les équations (5.67) et (5.68), il vient que

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^{\text{int}}(\mathbf{y}) &= 0, \\ I_{\varepsilon}^{\text{ext}}(\mathbf{y}) &= \beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) \kappa n(n+1) (|\mathbf{y}| + \varepsilon)^2 \\ &\quad \left[h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) - j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) h_n^{(1)'}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité du Wronskien (4.56), nous obtenons

$$I_{\varepsilon}^{\text{ext}}(\mathbf{y}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})}{i\kappa} n(n+1). \quad (5.70)$$

Finalement, l'équation (*) implique

$$\beta_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y}) = -\frac{\kappa^2}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p} \right). \quad (5.71)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$.

Identification de $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$

Pour identifier le coefficients $\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$, il faut reproduire le calcul du paragraphe précédent en choisissant $\psi_{n,m}^{(2)}$ comme fonction-test. Nous reprenons le calcul à partir de

$$\left\langle \mathbf{rot} \, \mathbf{rot} \, \mathbf{E}_{\mathbf{y}} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\mathbf{y}}, \psi_{n,m}^{(2)} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ I_{\varepsilon}^{\text{int}}(\mathbf{y}) + I_{\varepsilon}^{\text{ext}}(\mathbf{y}) \right\},$$

où

$$I_{\varepsilon}^{\text{int}} = \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}} \left\{ \gamma_t \mathbf{E}_{\mathbf{y}} \cdot \gamma_{\times} (\mathbf{rot} \, \overline{\psi_{n,m}^{(2)}}) + \gamma_t (\mathbf{rot} \, \mathbf{E}_{\mathbf{y}}) \cdot \gamma_{\times} \overline{\psi_{n,m}^{(2)}} \right\} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \quad (5.72a)$$

$$I_{\varepsilon}^{\text{ext}} = - \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} \left\{ \gamma_t \mathbf{E}_{\mathbf{y}} \cdot \gamma_{\times} (\mathbf{rot} \, \overline{\psi_{n,m}^{(2)}}) + \gamma_t (\mathbf{rot} \, \mathbf{E}_{\mathbf{y}}) \cdot \gamma_{\times} \overline{\psi_{n,m}^{(2)}} \right\} d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}, \quad (5.72b)$$

en tenant compte de l'orientation de la normale \mathbf{n} . Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la fonction de troncature $\eta_{\mathbf{y}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| - \varepsilon) &= 1, & \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| + \varepsilon) &= 1, \\ \nabla \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| - \varepsilon) &= 0, & \nabla \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{y}| + \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \overline{\psi_{n,m}^{(2)}}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{i\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\varepsilon}^{-}, \end{aligned} \quad (5.73a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \overline{\psi_{n,m}^{(2)}}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{i\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) j_n'(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \mathbf{rot}_{\mathcal{S}^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\varepsilon}^{+}, \end{aligned} \quad (5.73b)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{rot} \overline{\psi_{n,m}^{(2)}}(\mathbf{x}) = -i\kappa j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon^-, \quad (5.73c)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{rot} \overline{\psi_{n,m}^{(2)}}(\mathbf{x}) = -i\kappa j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon^+. \quad (5.73d)$$

Ainsi, en injectant les expressions (5.65a)-(5.65d) et (5.73a)-(5.73d) dans (5.72a)-(5.72b), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) = & -i\kappa j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\mathbf{s}_x - \frac{1}{i\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \\ & + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j'_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\mathbf{s}_x, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) = & i\kappa j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\mathbf{s}_x + \frac{1}{i\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \\ & + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) j'_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\mathbf{s}_x. \end{aligned} \quad (5.75)$$

De plus, d'après les expressions (5.65), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_x &= \frac{\alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})}{i\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)} [j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon) j'_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon))] \\ & \quad \int_{\Gamma_\varepsilon^-} |\nabla_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_x, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_x &= -i\kappa \alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) j_n(\kappa(|\mathbf{y}| - \varepsilon)) \int_{\Gamma_\varepsilon^-} |\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_x, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \gamma_t \mathbf{E}_y \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_x &= \frac{\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})}{i\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)} [h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) + \kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon) h_n^{(1)'}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon))] \\ & \quad \int_{\Gamma_\varepsilon^+} |\nabla_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_x, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \gamma_t (\mathbf{rot} \mathbf{E}_y) \cdot \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}} d\mathbf{s}_x &= -i\kappa \beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} |\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_x. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\int_{\{|\mathbf{x}|=r\}} |\nabla_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_x = \int_{\{|\mathbf{x}|=r\}} |\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}|^2 d\mathbf{s}_x = r^2 n(n+1), \quad (5.76)$$

et en injectant les expressions précédentes dans les équations (5.74) et (5.75), il vient que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{\text{int}}(\mathbf{y}) &= 0, \\ I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) &= \beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) \kappa n(n+1) (|\mathbf{y}| + \varepsilon)^2 \\ & \quad \left[h_n^{(1)'}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) j_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) - h_n^{(1)}(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) j'_n(\kappa(|\mathbf{y}| + \varepsilon)) \right], \end{aligned}$$

En outre, d'après l'identité du Wronskien (4.56), il suit

$$I_\varepsilon^{\text{ext}}(\mathbf{y}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})}{i\kappa} n(n+1). \quad (5.77)$$

Finalement, l'équation (**) implique

$$\beta_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y}) = -\frac{i\kappa}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}}(\hat{\mathbf{y}}) \right] \cdot \mathbf{p} \right). \quad (5.78)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$.

Conclusion

En utilisant les résultats (5.55), (5.61), (5.57), (5.71) et (5.78), nous déduisons que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (5.79) \end{aligned}$$

dans $\mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\})$. De plus, d'après la convergence des séries associées à $\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$ et à $\nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{x}}(\Phi(\cdot, \mathbf{y})\mathbf{p})$, nous déduisons que série (5.79) ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|\})$ et convergent uniformément sur tout compact de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}$.

Remarque 5.19. En choisissant les fonctions-test

$$\mathbf{x} \mapsto \eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|) \overline{h_n^{(1)}(|\mathbf{x}|) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, \quad \in \mathcal{C}_c^\infty((0, +\infty) \times \mathcal{S}^2), \quad (5.80)$$

$$\mathbf{x} \mapsto -\frac{\eta_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}|)}{i\kappa} \mathbf{rot} \left[\overline{h_n^{(1)}(|\mathbf{x}|) \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} \right], \quad \in \mathcal{C}_c^\infty((0, +\infty) \times \mathcal{S}^2), \quad (5.81)$$

nous pouvons identifier les coefficients $\alpha_{n,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ et $\alpha_{n,m}^{(2)}(\mathbf{y})$ et pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{R}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{R}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \nabla R_{n,m}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (5.82) \end{aligned}$$

dans $\mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\})$. Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\})$ et uniformément sur tout compact de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|\}$.

Chapitre 6

Décomposition modale des solutions des équations de Helmholtz et de Maxwell

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans un premier temps à la décomposition modale des solutions de l'équation de Helmholtz dans des géométries régulières, non-nécessairement sphériques. Pour cela, nous rappelons la définition d'opérateurs intégraux ainsi que des formules de représentations intégrales [41]. Puis, nous déterminons une décomposition modale de la solution à l'aide de ces opérateurs et du lemme d'addition scalaire, voir le chapitre 4. Dans un second temps, nous déterminons une décomposition modale des solutions des équations de Maxwell dont les coefficients peuvent être calculés explicitement à travers les formules de Stratton-Chu [40, 41] et le lemme d'addition vectoriel, voir le chapitre 5. Cette dernière décomposition est souvent citée dans la littérature [17, 40] [46, chapitre 1.4.1] mais le calcul des coefficients spectraux n'est jamais explicité.

Dans toute la suite, D désigne un domaine borné de \mathbb{R}^3 , simplement connexe, de frontière Γ infiniment différentiable tel que D soit situé d'un seul côté de Γ . Nous notons \mathbf{n} le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de D et Ω le complémentaire de \overline{D} dans \mathbb{R}^3 . Nous supposons que Ω est connexe.

6.1 Décomposition modale des solutions de l'équation de Helmholtz

Nous rappelons que $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ désigne la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz et nous supposons que

$$\Im(\kappa) > 0. \quad (6.1)$$

6.1.1 Définition des opérateurs intégraux

Définition 6.1. *L'opérateur intégral \mathcal{V} , appelé potentiel de simple couche, est défini comme suit :*

$$\mathcal{V} : \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \quad (6.2)$$

associe à une fonction scalaire (ou vectorielle) $p \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ la fonction $\mathcal{V}p$ définie par

$$\mathcal{V}p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (6.3)$$

Proposition 6.2. Si $\Im(\kappa) > 0$, le potentiel de simple couche \mathcal{V} peut être étendu en un opérateur linéaire et continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(D) \cup H^1(\Omega)$.

Remarque 6.3. Si $\kappa \in \mathbb{R}^*$, le potentiel de simple couche \mathcal{V} peut être étendu en un opérateur linéaire et continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(D) \cup H_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Définition 6.4. L'opérateur intégral \mathcal{N} , appelé potentiel de double couche, est défini comme suit :

$$\mathcal{N} : \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \quad (6.4)$$

associe à une fonction scalaire (ou vectorielle) $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ la fonction $\mathcal{N}\lambda$ définie par

$$\mathcal{N}\lambda(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{y})(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (6.5)$$

Proposition 6.5. Si $\Im(\kappa) > 0$, le potentiel de double couche \mathcal{N} peut être étendu en un opérateur linéaire et continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(D) \cup H^1(\Omega)$.

Remarque 6.6. Si $\kappa \in \mathbb{R}^*$, le potentiel de double couche \mathcal{N} peut être étendu en un opérateur linéaire et continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(D) \cup H_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

6.1.2 Représentation intégrale de la solution

Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ une solution de l'équation de Helmholtz homogène

$$-\Delta u - \kappa^2 u = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (6.6)$$

avec $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$. Dans ce qui suit, $u_{\text{int}} \in H^2(D)$ désigne la restriction de u à D et $u_{\text{ext}} \in H^1(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ la restriction de u à Ω . De plus, nous introduisons les notations de saut :

Définition 6.7. Pour tout réel $s \geq 1$, le saut d'une fonction scalaire $v \in H^s(D) \cup H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, noté $[v]_{\Gamma}$, est défini par

$$[v]_{\Gamma} = v_{\text{ext}}|_{\Gamma} - v_{\text{int}}|_{\Gamma} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (6.7)$$

Pour tout réel $s \geq 0$, le saut d'une fonction vectorielle $\mathbf{w} \in H^s(\text{div}, D) \cup H_{\text{loc}}^s(\text{div}, \Omega)$, noté $[\![\mathbf{w}]\!]_{\Gamma}$, est défini par

$$[\![\mathbf{w}]\!]_{\Gamma} = \mathbf{w}_{\text{ext}}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} + \mathbf{w}_{\text{int}}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{\text{int}} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (6.8)$$

où $\mathbf{n}_{\text{int}} = \mathbf{n}$ désigne le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de D et $\mathbf{n}_{\text{ext}} = -\mathbf{n}$.

Le théorème de représentation intégrale de la solution de l'équation de Helmholtz (6.6) est le suivant :

Théorème 6.8. Toute solution u de l'équation de Helmholtz (6.6) est donnée par

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{N}[u]_{\Gamma}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}[\![\nabla u]\!]_{\Gamma}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (6.9)$$

Démonstration. Nous commençons par démontrer que

$$-\Delta u - \kappa^2 u = [u]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}^{\mathbf{n}} + [\![\nabla u]\!]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (6.10)$$

où $\delta_\Gamma^\mathbf{n}$ et δ_Γ désignent les distributions à support dans Γ définies par

$$\begin{aligned}\langle T \delta_\Gamma^\mathbf{n}, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle T, \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi \rangle_\Gamma, & \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3), \forall T \in \mathcal{D}'(\Gamma) \\ \langle T \delta_\Gamma, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle T, \varphi \rangle_\Gamma, & \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3), \forall T \in \mathcal{D}'(\Gamma).\end{aligned}$$

Calculons $-\Delta u - \kappa^2 u$ au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 . Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle -\Delta u - \kappa^2 u, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= - \int_{\mathbb{R}^3} u \left(\Delta \bar{\varphi} + \kappa^2 \bar{\varphi} \right) d\mathbf{x}, \\ &= - \int_D u_{\text{int}} \left(\Delta \bar{\varphi} + \kappa^2 \bar{\varphi} \right) d\mathbf{x} - \int_\Omega u_{\text{ext}} \left(\Delta \bar{\varphi} + \kappa^2 \bar{\varphi} \right) d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Comme les restrictions u_{int} et u_{ext} appartiennent respectivement à $H^2(D)$ et $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$, nous appliquons les formules de Green (2.52) et (2.51) et en utilisant les équations vérifiées par u_{int} et u_{ext} dans les domaines considérés, nous obtenons le résultat souhaité

$$\begin{aligned}\langle -\Delta u - \kappa^2 u, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_\Gamma [u]_\Gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla \bar{\varphi}) ds_\mathbf{x} + \langle \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma, \varphi \rangle_\Gamma, \\ &= \langle [u]_\Gamma \delta_\Gamma^\mathbf{n} + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \delta_\Gamma, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3}.\end{aligned}$$

Remarque 6.9. Le saut $[u]_\Gamma$ de u appartient à $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et le saut $\llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma$ de $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En vertu de l'injection des espaces de Sobolev dans les espaces de fonctions continues, comme Γ est de dimension deux, nous déduisons que

$$[u]_\Gamma \in \mathcal{C}^0(\Gamma). \quad (6.11)$$

D'après la proposition 3.4, une solution de l'équation (6.10) est donnée par

$$u = G * ([u]_\Gamma \delta_\Gamma^\mathbf{n} + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \delta_\Gamma),$$

où $*$ désigne le produit de convolution au sens des distributions. Il s'agit à présent de caractériser ce produit de convolution au sens des distributions dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle G * ([u]_\Gamma \delta_\Gamma^\mathbf{n} + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \delta_\Gamma), \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3}, \\ &= \langle G, \langle [u]_\Gamma \delta_\Gamma^\mathbf{n} + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \delta_\Gamma, \varphi(\mathbf{x} + \cdot) \rangle_{\mathbb{R}^3} \rangle_{\mathbb{R}^3}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}) \left(\int_\Gamma [u]_\Gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla_\mathbf{y} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) ds_\mathbf{y} + \langle \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma, \varphi(\mathbf{x} + \cdot) \rangle_\Gamma \right) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Supposons que $\llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma$ soit suffisamment régulier de sorte qu'on puisse identifier le crochet de dualité avec une intégrale. Nous justifierons en suivant l'extension à $\llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. D'après le théorème de Fubini et en effectuant le changement de variable $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, il vient

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^3} \{ [u]_\Gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla_\mathbf{y} (G(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma G(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \} d\mathbf{x} d\mathbf{s}_\mathbf{y}, \\ &= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^3} \{ [u]_\Gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla_\mathbf{y} (G(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \varphi(\mathbf{x}) + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x})) \} d\mathbf{x} d\mathbf{s}_\mathbf{y}, \\ &= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^3} \{ [u]_\Gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla_\mathbf{y} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \varphi(\mathbf{x}) + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \} d\mathbf{x} d\mathbf{s}_\mathbf{y}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_\Gamma \{ [u]_\Gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla_\mathbf{y} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} ds_\mathbf{y} \right] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ &= \langle \mathcal{N}[u]_\Gamma + \mathcal{V} \llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 6.2, ce résultat reste vrai pour $\llbracket \nabla u \rrbracket_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. \square

Si u vérifie l'équation de Helmholtz homogène dans D (resp. dans Ω), cette représentation est encore effective en prolongeant u par 0 dans Ω (resp. dans D) et nous déduisons les corollaires suivants :

Corollaire 6.10. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Toute solution $u \in H^1(D)$ de l'équation de Helmholtz homogène dans D admet la représentation intégrale suivante :*

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\nabla u|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) - \mathcal{N}u|_{\Gamma}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (6.12)$$

Corollaire 6.11. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de l'équation de Helmholtz homogène dans Ω admet la représentation intégrale suivante :*

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{N}u|_{\Gamma}(\mathbf{x}) - \mathcal{V}(\nabla u|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.13)$$

Remarque 6.12. Ces résultats peuvent être étendus lorsque $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas la solution u est seulement $H^1(D) \cap H_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

6.1.3 Décomposition modale de la solution du problème de Helmholtz en domaine extérieur

Quitte à effectuer un changement de repère, nous supposons que $\mathbf{0}$ appartient à D . Soit \mathcal{B}_R la boule ouverte de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R telle que

$$\overline{D} \subset \mathcal{B}_R. \quad (6.14)$$

La figure (6.1) illustre la définition de \mathcal{B}_R . Le théorème de décomposition modale des

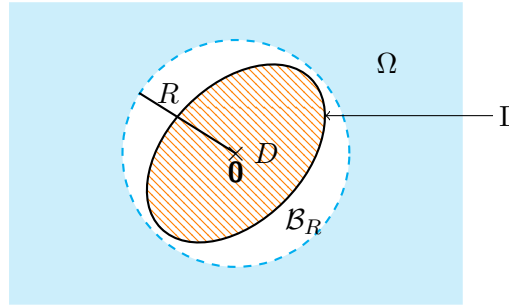


FIGURE 6.1 – Domaine $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > R\}$ bleuté

solutions de l'équation de Helmholtz homogène dans $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ est le suivant.

Proposition 6.13. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de l'équation de Helmholtz homogène dans Ω admet la décomposition modale suivante dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}$:*

$$u(\mathbf{x}) = i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \left[\kappa \int_{\Gamma} u(\mathbf{y}) j_n'(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\Gamma} (\nabla u \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right] \right\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}. \quad (6.15)$$

Cette série ainsi que ses dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R})$ et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}$.

Démonstration. Si $\mathbf{y} \in \Gamma$ alors

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R} \implies |\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|. \quad (6.16)$$

Donc, d'après le lemme d'addition 4.10, nous avons les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n j_n(\kappa|\mathbf{y}|) h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})}, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= i\kappa^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n j'_n(\kappa|\mathbf{y}|) h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})}, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}. \end{aligned}$$

Ces séries ainsi que leurs dérivées successives convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R})$ et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}$. Pour obtenir la décomposition souhaitée, il suffit d'injecter ces expressions dans la formule de représentation intégrale (6.13). \square

Remarque 6.14. Ces résultats peuvent être étendus lorsque $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas, la solution u est seulement $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

6.2 Décomposition modale des solutions des équations de Maxwell

Soit $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ un champ électromagnétique incident de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nous nous intéressons au problème extérieur de Maxwell du premier ordre qui consiste à chercher $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$ dans $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ tels que

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}^s - i\kappa \mathbf{H}^s = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega, & (6.17a) \\ \text{rot } \mathbf{H}^s + i\kappa \mathbf{E}^s = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega, & (6.17b) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}^s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i, & \text{sur } \Gamma, & (6.17c) \end{cases}$$

où les champs totaux \mathbf{E} et \mathbf{H} ont été préalablement normalisés et le nombre d'onde κ , défini par la relation (5.5a)-(5.5b), admet une partie imaginaire strictement positive.

6.2.1 Formules de Stratton-Chu

Les formules de Stratton-Chu donnent une représentation intégrale de la solution des équations de Maxwell (normalisées) en domaine borné ou en domaine extérieur. Cette représentation dépend seulement de la trace tangentielle des champs électromagnétiques sur la frontière du domaine. Nous les énonçons dans des domaines réguliers mais il est possible de les généraliser pour un domaine lipschitzien [40].

Théorème 6.15. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soient \mathbf{E} et $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, D)$ une solution du problème de Maxwell homogène dans D . Alors les champs électromagnétiques admettent la représentation suivante*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{E}(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}} + \frac{1}{i\kappa} \text{rot rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{H}(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (6.18a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\text{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{H}(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}} - \frac{1}{i\kappa} \text{rot rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{E}(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (6.18b)$$

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [17, chapitre 6] ou [40, chapitre 9]. \square

Dans ce qui suit, nous nous intéressons particulièrement au problème extérieur de l'électromagnétisme. Nous utiliserons la formule de Stratton-Chu en domaine extérieur, qui est la suivante :

Théorème 6.16. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soient \mathbf{E} et $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ une solution du problème de Maxwell homogène (6.17a)-(6.17c) dans Ω . Alors les champs électromagnétiques diffractés admettent la représentation suivante*

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.19a)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} + \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.19b)$$

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [17, chapitre 6] ou [40, chapitre 9]. \square

Remarque 6.17. Ces formules peuvent être étendues lorsque $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} appartiennent à $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

6.2.2 Décomposition modale des solutions du problème uni-obstacle

Soit \mathcal{B}_R une boule ouverte de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R telle que

$$\overline{D} \subset \mathcal{B}_R. \quad (6.20)$$

La figure (6.1) illustre la définition de \mathcal{B}_R .

Théorème 6.18. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soient \mathbf{E} et $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ une solution du problème de Maxwell homogène (6.17a)-(6.17c) dans Ω . Alors les champs diffractés admettent la représentation suivante dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}_R}$:*

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(I_{n,m}^{(1)} + I_{n,m}^{(2)} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) + \left(I_{n,m}^{(3)} + I_{n,m}^{(4)} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \right\} \right\} \quad (6.21)$$

et

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(I_{n,m}^{(1)} + I_{n,m}^{(2)} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) - \left(I_{n,m}^{(3)} + I_{n,m}^{(4)} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right\} \right\} \quad (6.22)$$

où

$$I_{n,m}^{(1)} = -i\kappa \int_{\Gamma} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad (6.23a)$$

$$I_{n,m}^{(2)} = -\kappa^2 \int_{\Gamma} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad (6.23b)$$

$$I_{n,m}^{(3)} = \kappa^2 \int_{\Gamma} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad (6.23c)$$

$$I_{n,m}^{(4)} = -i\kappa \int_{\Gamma} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}. \quad (6.23d)$$

Démonstration du théorème 6.18. D'après la formule de Stratton-Chu (6.19a), le champ électrique diffracté \mathbf{E}^s admet la représentation suivante :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

De plus, si $\mathbf{y} \in \Gamma$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_R$, alors $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$. Donc nous pouvons appliquer le lemme d'addition vectoriel et, pour tout $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, la solution fondamentale $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}$ admet la décomposition modale suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned}$$

pour tous $\mathbf{y} \in \Gamma$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_R$. Ainsi, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = & \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right. \\ & - \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \left(\mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & \left. \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_R. \right. \end{aligned}$$

Comme les séries de fonctions de terme général

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mapsto & \frac{i\kappa}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x, \\ \mathbf{x} \mapsto & \frac{i\kappa}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x, \\ \mathbf{x} \mapsto & \frac{i}{\kappa} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right) \nabla S_{n,m}, \\ \mathbf{x} \mapsto & \frac{i}{\kappa} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right) \nabla S_{n,m} \end{aligned}$$

convergent dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_R)$, il est possible d'intervertir les signes sommes et intégrales

et, en passant les signes rotationnel sous le signe somme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \\ & \left. + \frac{1}{i\kappa n(n+1)} \left(\int_{\Gamma} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x}) \right\}. \end{aligned}$$

La conclusion provient des identités $\mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^x = -i\kappa \mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{rot} \mathbf{S}_{n,m}^t = i\kappa \mathbf{S}_{n,m}^x$ ainsi que de la condition aux limites (6.17c). Nous retrouvons l'expression du champ magnétique \mathbf{H}^s grâce à la relation $\mathbf{H}^s = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s$. \square

6.2.3 Décomposition modale des solutions du problème multi-obstacles

Nous considérons N domaines (ouverts connexes non-vide) bornés $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_N$ de \mathbb{R}^3 , simplement connexes. Pour tout $j = 1, \dots, N$,

- nous notons Γ_j la frontière de \mathcal{O}_j et \mathbf{n}_j le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de \mathcal{O}_j ,
- nous supposons que Γ_j est connexe et infiniment différentiable, \mathcal{O}_j est situé d'un seul côté de Γ_j et pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\overline{\mathcal{O}_i} \cap \overline{\mathcal{O}_j} = \emptyset, \quad \text{si } i \neq j, \quad (6.24)$$

- nous supposons qu'il existe un élément $\mathbf{x}_j \in \mathcal{O}_j$ et un réel $\rho_j > 0$ tels que la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathbf{x}_j, \rho_j)$ de centre \mathbf{x}_j et de rayon ρ_j vérifie (6.20) avec $D = \mathcal{O}_j$ et

$$\overline{\mathcal{B}(\mathbf{x}_i, \rho_i)} \cap \overline{\mathcal{B}(\mathbf{x}_j, \rho_j)} = \emptyset, \quad \forall i \neq j. \quad (6.25)$$

Enfin, nous notons Ω le domaine extérieur défini par

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_j} \right), \quad (6.26)$$

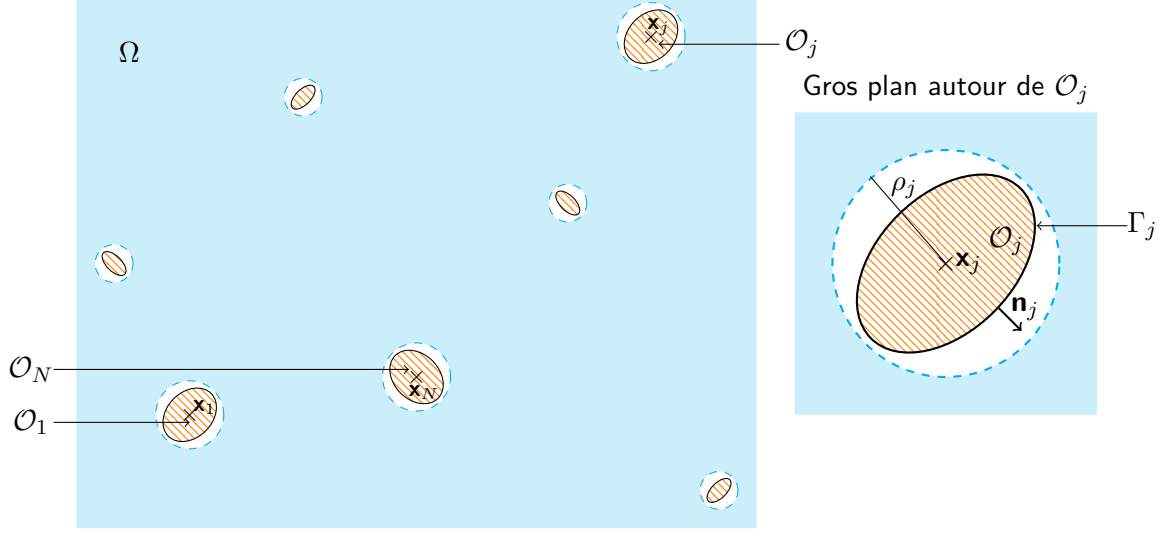
La figure 6.2 illustre la géométrie définie. Le théorème de décomposition modale de la solution du problème de diffraction multi-obstacles de Maxwell est le suivant.

Théorème 6.19. *Supposons que $\Im(\kappa) > 0$. Soient \mathbf{E} et $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ une solution du problème de Maxwell homogène (6.17a)-(6.17c) dans Ω . Alors les champs diffractés admettent la représentation suivante*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = & \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(I_{n,m}^{(1),j} + I_{n,m}^{(2),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(I_{n,m}^{(3),j} + I_{n,m}^{(4),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} \right\} \quad (6.27) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = & \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(-I_{n,m}^{(3),j} - I_{n,m}^{(4),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(I_{n,m}^{(1),j} + I_{n,m}^{(2),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} \right\}, \quad (6.28) \end{aligned}$$


 FIGURE 6.2 – Domaine $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}(\mathbf{x}_j, \rho_j)} \right)$ bleuté

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}(\mathbf{x}_j, \rho_j)} \right)$, où

$$I_{n,m}^{(1),j} = -i\kappa \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad (6.29a)$$

$$I_{n,m}^{(2),j} = -\kappa^2 \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad (6.29b)$$

$$I_{n,m}^{(3),j} = \kappa^2 \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad (6.29c)$$

$$I_{n,m}^{(4),j} = -i\kappa \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}. \quad (6.29d)$$

Démonstration. D'après la formule de Stratton-Chu (6.19a), le champ électrique diffracté \mathbf{E}^s admet la représentation suivante :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \left\{ \mathbf{rot} \int_{\Gamma_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma_j} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Il suffit de remarquer que pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, \mathbf{y} - \mathbf{x}_j)$$

et de substituer l'expression de $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p}$ donnée par le lemme d'addition vectoriel pour $\mathbf{p} = \gamma_{\times} \mathbf{E}^s$ ou $\mathbf{p} = \gamma_{\times} \mathbf{H}^s$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{p} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i\kappa}{n(n+1)} j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \left(\overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right. \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\ & \left. + \frac{i}{\kappa} \left(\nabla \left[j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \overline{\mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right] \cdot \mathbf{p} \right) \nabla S_{n,m}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\}. \end{aligned}$$

pour $\mathbf{y} \in \Gamma_j$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}(\mathbf{x}_j, \rho_j)} \right)$ dans la représentation intégrale. \square

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons déterminé une décomposition modale des solutions des problèmes extérieurs de Helmholtz et de Maxwell à l'aide d'une représentation intégrale des solutions et d'un lemme technique qui permet de représenter la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz par une série orthogonale. Pour le problème de Helmholtz, toute solution u du problème de diffraction par un obstacle admet la décomposition modale suivante en dehors d'un voisinage de l'obstacle :

$$u(\mathbf{x}) = i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \left[\kappa \int_{\Gamma} u(\mathbf{y}) j'_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\Gamma} (\nabla u \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) j_n(\kappa|\mathbf{y}|) \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{y}})} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \right] \right\},$$

où le nombre d'onde κ admet une partie imaginaire strictement positive, Γ désigne la frontière de l'obstacle, $h_n^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel de première espèce d'ordre n , j_n désigne la fonction de Bessel d'ordre n et $Y_{n,m}$ désigne la m -ème fonction harmonique sphérique d'ordre n . De la même manière que nous l'avons fait pour le problème de Maxwell, il est possible de généraliser cette formule dans le cadre du problème de diffraction d'ondes acoustiques par N obstacles, en mettant en place des formules multi-centre. Pour le problème de Maxwell, toute solution $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ du problème de diffraction par N obstacles admet la décomposition modale suivante en dehors d'un voisinage de l'ensemble des obstacles :

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(I_{n,m}^{(1),j} + I_{n,m}^{(2),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(I_{n,m}^{(3),j} + I_{n,m}^{(4),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} \right\}$$

et

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(-I_{n,m}^{(3),j} - I_{n,m}^{(4),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(I_{n,m}^{(1),j} + I_{n,m}^{(2),j} \right) \mathbf{S}_{n,m}^x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} \right\},$$

où les coefficients spectraux sont donnés par

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^{(1),j} &= i\kappa \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \\
 I_{n,m}^{(2),j} &= -\kappa^2 \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \\
 I_{n,m}^{(3),j} &= -\kappa^2 \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{E}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \\
 I_{n,m}^{(4),j} &= -i\kappa \int_{\Gamma_j} \gamma_t \left(\mathbf{rot} \left[j_n(\kappa|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|) \mathbf{rot}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j)} \right] \right) \cdot \gamma_{\times} \mathbf{H}^s(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}
 \end{aligned}$$

et où le nombre d'onde κ admet une partie imaginaire strictement positive, Γ_j désigne la frontière du j -ème obstacle et $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^x$ désignent les modes associés au problème extérieur de l'électromagnétisme.

Nous avons mis en place un cadre théorique adapté aux problèmes de diffraction multi-obstacles sur lequel nous nous appuierons pour déterminer des modèles approchés du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par de petits obstacles. Nous nous sommes placés dans un cadre où nous avons supposé que les hétérogénéités étaient des conducteurs parfaits. Toutefois, il est possible d'étendre ces résultats de décompositions modales pour des hétérogénéités non-vides [36]. Celles-ci pourront être utiles pour expliciter les coefficients des développements approchés de la solution du problème de diffraction par de petites inclusions non-parfaitement conductrices.

Appendices

Annexe A

Théorie spectrale des opérateurs non-bornés

Notre étude passe par la caractérisation des espaces de trace de fonctions appartenant aux espaces de Sobolev $H^1(D)$, $\mathbf{H}(\text{div}, D)$ et $\mathbf{H}(\text{rot}, D)$, où D est un domaine borné régulier. Nous présentons ici quelques résultats de la théorie spectrale des opérateurs non-bornés, notamment développés dans [37]. Les résultats énoncés dans cet appendice sont principalement issus de [29, 47]. Dans un premier temps, nous rappelons les propriétés des opérateurs bornés et énonçons un résultat de théorie spectrale valable pour des opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert séparable. Dans un deuxième temps, nous présenterons un théorème spectral des *opérateurs non-bornés* auto-adjoints à *résolvante compacte*. Enfin, nous énoncerons quelques résultats de la théorie d'interpolation que nous appliquerons au cas de l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes : H désigne un espace de Hilbert réel ou complexe séparable de dimension infinie, muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et $\mathcal{L}(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de H dans H .

A.1 Théorie spectrale des opérateurs bornés auto-adjoints compacts

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur linéaire borné.

Définition A.1. *L'opérateur A est dit compact si l'image de la boule unité fermée de H par A est relativement compacte dans H .*

Nous énonçons l'alternative de Fredholm qui permet de déterminer si une perturbation compacte de l'identité est inversible, voir [40, théorème 2.33] par exemple.

Théorème A.2. *Soit $K : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire borné compact. Alors l'ensemble $\ker(\text{Id}_H + K)$, où Id_H désigne l'opérateur identité de H , est de dimension finie et $(\text{Id}_H + K)$ est injectif si et seulement si $(\text{Id}_H + K)$ est surjectif si et seulement si $(\text{Id}_H + K)$ est bijectif.*

L'adjoint A^* de $A \in \mathcal{L}(H)$ est l'opérateur linéaire borné défini à l'aide du théorème de représentation de Riesz par la relation

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (\text{A.1})$$

On dit que A est auto-adjoint si $A^* = A$. Le résultat suivant, voir [40, théorème 2.36] par exemple, concerne la diagonalisation des opérateurs bornés compacts auto-adjoints :

Théorème A.3. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur linéaire borné. Si A est compact et auto-adjoint, alors il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R} telles que

- (i) $Ae_n = \lambda_n e_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $(e_n, e_m)_H = \delta_{nm}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,
- (iii) la suite $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, strictement positive et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus, tout $u \in H$ peut être représenté à l'aide de la série convergente dans H dont les termes sont deux à deux orthogonaux

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n, \quad \text{où } u_n = (u, e_n)_H. \quad (\text{A.2})$$

D'autre part, nous avons l'égalité de Parseval

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Théorie spectrale des opérateurs non-bornés auto-adjoints à résolvante compacte

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné de domaine $D(A)$.

A.2.1 Opérateur maximal monotone

Définition A.4. L'opérateur A est dit fermé si son graphe $G(A)$, défini par

$$G(A) = \{(u, v) \in H \times H, u \in D(A) \text{ et } v = Au\}, \quad (\text{A.4})$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $H \times H$.

Définition A.5. L'opérateur A est dit monotone si $(Au, u)_H \geq 0$, pour tout $u \in D(A)$.

Définition A.6. L'opérateur A est dit maximal si pour tout $f \in H$, il existe $u \in D(A)$ tel que $Au + u = f$.

La proposition suivante est issue de [13, proposition VII.1].

Proposition A.7. Si A est maximal et monotone alors A est fermé et son domaine $D(A)$ est dense dans H . De plus, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $A + \lambda \text{Id}_H$ est bijectif et son inverse $(A + \lambda \text{Id}_H)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur borné d'image $D(A)$.

A.2.2 Théorème spectral

Nous rappelons tout d'abord le théorème de représentation de Riesz pour les formes antilinéaires (voir [29, théorème 2.2] par exemple).

Théorème A.8. Soit f une forme antilinéaire continue dans H . Il existe un unique élément $u \in H$ tel que

$$f(v) = (u, v)_H, \quad \forall v \in H. \quad (\text{A.5})$$

Nous supposons que $D(A)$ est dense dans H . L'adjoint A^* de A est l'unique opérateur non-borné de domaine

$$D(A^*) = \{v \in H, \exists c_v \geq 0, \forall u \in D(A), (Au, v)_H \leq c_v \|u\|_H\}, \quad (\text{A.6})$$

où $\|\cdot\|_H$ désigne la norme induite par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$, vérifiant

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*). \quad (\text{A.7})$$

Cet opérateur est défini de manière unique d'après la densité de $D(A)$ dans H et le théorème de représentation de Riesz.

Définition A.9. L'opérateur A est dit *auto-adjoint* si $D(A^*) = D(A)$ et si A vérifie

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H, \quad \forall u, v \in D(A). \quad (\text{A.8})$$

Définition A.10. L'ensemble résolvant de A , noté $\rho(A)$, est l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'application $A - \lambda \text{Id}_H$ est bijective de $D(A)$ dans H . Son inverse

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda \text{Id}_H)^{-1}, \quad (\text{A.9})$$

appelé *résolvante* de A en λ , est linéaire et continu de H dans H .

L'opérateur A est à résolvante compacte s'il existe $\lambda \in \rho(A)$ tel que $R_\lambda(A)$ soit compact.

Proposition A.11. Si A est maximal monotone et si $D(A)$ s'injecte de façon compacte dans H alors A est à résolvante compacte.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers un élément $u \in H$. Puisque A est maximal, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in D(A)$ tel que $Av_n + v_n = u_n$. D'après la proposition A.7, l'inverse de $(A + \text{Id}_H)$ est bien défini et appartient à $\mathcal{L}(H)$, donc $v_n = (A + \text{Id}_H)^{-1}u_n$ converge faiblement vers $v = (A + \text{Id}_H)^{-1}u$ dans $D(A)$. Puisque $D(A)$ s'injecte de façon compacte dans H , il vient que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers v dans H . \square

Théorème A.12. Si A est auto-adjoint à résolvante compacte alors il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ et une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \rho(A)$ telles que

$$(i) \quad Ae_n = \mu_n e_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \quad (e_n, e_m)_H = \delta_{nm} \text{ pour tous } n, m \in \mathbb{N},$$

$$(iii) \quad \text{la suite } (|\mu_n|) \text{ est croissante et } |\mu_n| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

De plus, tout $u \in D(A)$ peut être représenté à l'aide de la série convergente dans H dont les termes sont deux à deux orthogonaux

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n, \quad \text{où } u_n = (u, e_n)_H. \quad (\text{A.10})$$

D'autre part, nous avons l'égalité de Parseval

$$\|u\|_H^2 = \sum_n |u_n|^2. \quad (\text{A.11})$$

Démonstration. A étant à résolvante compacte, il existe $\lambda \in \rho(A)$ tel que $R_\lambda(A)$ soit compact. De plus, $R_\lambda(A)$ est auto-adjoint car A l'est. À λ fixé, d'après le théorème spectral A.3, il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H et une suite réelle $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que (ii) soit vérifié et

$$R_\lambda(A)e_n = \lambda_n e_n \iff Ae_n = \left(\frac{1}{\lambda_n} + \lambda \right) e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ et (i) est vérifié. De plus, la suite de valeurs propres ainsi définie vérifie l'assertion (iii). Les deux dernières propriétés proviennent du théorème A.3. \square

Remarque A.13. Comme $D(A)$ est dense dans H , la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de H .

A.2.3 Application

Soit $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné de domaine $D(B)$ s'injectant dans H de façon dense et compacte. Nous supposons que pour tout $f \in H$, il existe un unique élément $u \in D(B)$ tel que

$$(Bu, Bv)_H + (u, v)_H = (f, v)_H, \quad \forall v \in D(B). \quad (\text{A.12})$$

L'espace $D(B)$ muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto (Bu, Bv)_H + (u, v)_H$ est un espace de Hilbert. Nous définissons la norme du graphe associée à B , induite par ce produit scalaire, par

$$\|u\|_B = \left(\|Bu\|_H^2 + \|u\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.13})$$

Nous considérons l'opérateur linéaire non-borné $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ de domaine

$$D(A) = \{u \in D(B), \exists c_u \geq 0, \forall v \in D(B), (Bu, Bv)_H \leq c_u \|v\|_H\}, \quad (\text{A.14})$$

vérifiant

$$(Au, v)_H = (Bu, Bv)_H, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(B). \quad (\text{A.15})$$

Cet opérateur est défini de manière unique d'après la densité de $D(B)$ dans H et le théorème de représentation de Riesz. De plus, A est monotone car pour tout $u \in D(A)$, nous avons $(Au, u)_H = \|Bu\|_H^2 \geq 0$. Montrons que A est maximal. Pour tout $f \in H$, l'hypothèse (A.12) implique qu'il existe $u \in D(B)$ tel que pour tout $v \in D(B)$, $(Bu, Bv)_H + (u, v)_H = (f, v)_H$. De plus,

$$\begin{aligned} (Bu, Bv)_H &= (f - u, v)_H, \\ &\leq \|f - u\|_H \|v\|_H, \end{aligned}$$

d'où $u \in D(A)$. Donc, pour tout $f \in H$, il existe $u \in D(A)$ tel que $(Au, v)_H + (u, v)_H = (f, v)_H$ pour tout $v \in D(A)$. D'après la proposition A.7, $D(A)$ est dense dans H . Ainsi, il est possible de définir l'adjoint A^* de A .

Proposition A.14. *L'opérateur non-borné $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est auto-adjoint.*

Démonstration. D'une part, pour tous $u, v \in D(A)$, nous avons

$$(u, Av)_H = \overline{(Av, u)}_H = \overline{(Bv, Bu)}_H = (Bu, Bv)_H = (Au, v)_H$$

donc $D(A) \subset D(A^*)$. Soit $u \in D(A^*)$. Par définition, nous avons pour tout $v \in D(A)$,

$$(u, Av + v)_H = (A^*u + u, v)_H.$$

Puisque A est maximal et $A^*u + u \in H$, il existe un unique $w \in D(A)$ tel que $Aw + w = A^*u + u$, d'où, pour tout $v \in D(A)$,

$$(u, Av + v)_H = (Aw + w, v)_H = (w, Av + v)_H,$$

car $D(A) \subset D(A^*)$. Ainsi, $(u - w, Av + v)_H = 0$ pour tout $v \in D(A)$. Comme A est maximal, considérons $v \in D(A)$ tel que $Av + v = u - w \in H$. Alors $\|u - w\|_H = 0$ et par conséquent, $u = w \in D(A)$. De plus, pour tout $v \in D(A)$,

$$(u, Av)_H = (Bu, Bv)_H \leq c_u \|v\|_H.$$

Donc $u \in D(A)$, puis $D(A^*) = D(A)$. \square

D'après la proposition A.7, puisque l'opérateur A est maximal monotone, A est fermé donc pour tout $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante de A en λ définie par $R_\lambda(A) = (A - \lambda \text{Id}_H)^{-1}$ est un opérateur borné de H dans H .

Proposition A.15. *La résolvante $R_\lambda(A)$ est un opérateur compact.*

Démonstration. Comme $D(B)$ s'injecte de façon compacte dans H et $D(A) \subset D(B)$, il suit que $D(A)$ s'injecte de façon compacte dans H . Il suffit d'utiliser la proposition A.11 pour conclure. \square

Le théorème spectral pour les opérateurs non-bornés auto-adjoints à résolvante compacte s'applique sur A . Ainsi, il existe une suite de réels $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H , constituée des vecteurs propres de l'opérateur A vérifiant $Ae_n = \mu_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si $u \in H$ alors u se décompose sous la forme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n, \quad \text{où } u_n = (u, e_n)_H. \quad (\text{A.16})$$

Par ailleurs, puisque A est monotone, nous avons

$$0 \leq (Ae_n, e_n) = \mu_n \|e_n\|_H^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.17})$$

donc $\mu_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition de l'opérateur A , nous avons

$$(Be_n, Be_m)_H = (Ae_n, e_m)_H = \mu_n \delta_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.18})$$

Ainsi, la norme du graphe sur $D(B)$ définie par (A.13) s'écrit sous la forme

$$\|u\|_B^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n) |u_n|^2. \quad (\text{A.19})$$

De même, nous définissons la norme du graphe de A

$$\|u\|_A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n^2) |u_n|^2. \quad (\text{A.20})$$

Réciproquement, les espaces $D(A)$ et $D(B)$ sont caractérisés par

$$D(B) = \{u \in H, \|u\|_B < \infty\}, \quad D(A) = \{u \in H, \|u\|_A < \infty\}. \quad (\text{A.21})$$

A.3 Puissances des opérateurs non-bornés auto-adjoints

A.3.1 Opérateur défini à partir d'une forme sesquilinéaire

Soit V un espace de Hilbert complexe séparable qui s'injecte de façon continue et dense dans H . Soit a une forme sesquilinéaire symétrique continue et définie positive sur V . À la forme sesquilinéaire a , nous associons l'opérateur linéaire non-borné S de domaine

$$D(S) = \{u \in V, \exists c_u \geq 0, \forall v \in V, a(u, v) \leq c_u \|v\|_H\}. \quad (\text{A.22})$$

Cet opérateur est défini de manière unique d'après la densité de V dans H et le théorème de représentation de Riesz ; c'est l'opérateur qui à $u \in D(S)$ associe Su vérifiant

$$a(u, v) = (Su, v)_H, \quad \forall v \in V. \quad (\text{A.23})$$

Si de plus la forme sesquilinéaire a est coercive sur V , il est possible de définir la racine carrée $S^{\frac{1}{2}}$ de l'opérateur S associé à a et ([29, théorème 2.9]) :

Théorème A.16. *Le domaine $D(S^{\frac{1}{2}})$ est exactement V et nous avons*

$$(S^{\frac{1}{2}}u, S^{\frac{1}{2}}v)_H = a(u, v), \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{A.24})$$

En particulier, $(Su, v)_H = (S^{\frac{1}{2}}u, S^{\frac{1}{2}}v)_H$ pour tous $u \in D(S)$, $v \in V$.

A.3.2 Espaces intermédiaires entre espaces de Hilbert

Définition A.17. *Pour $0 \leq \theta \leq 1$, nous définissons l'espace $[V, H]_\theta = D(S^{\frac{1-\theta}{2}})$ par*

$$[V, H]_\theta = \left\{ u \in H, \|u\|_H^2 + \|S^{\frac{1-\theta}{2}}u\|_H^2 < \infty \right\}. \quad (\text{A.25})$$

Ce sont les espaces intermédiaires entre V et H .

Théorème A.18. *Pour tous $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$, l'espace $[V, H]_{\theta_1}$ s'injecte de façon dense et continue dans $[V, H]_{\theta_2}$. De plus, si V s'injecte de façon compacte dans H alors pour tout $0 < \theta \leq 1$, l'espace $[V, H]_\theta$ s'injecte de façon compacte dans H .*

Remarque A.19. La définition de l'espace intermédiaire $[V, H]_\theta$ est intrinsèque à l'opérateur S , voir [37, remarque 2.3].

Remarque A.20. L'opérateur $S^{\frac{1-\theta}{2}}$ de domaine

$$D(S^{\frac{1-\theta}{2}}) = \left\{ u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n \in H, \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n^{1-\theta}) |u_n|^2 < \infty \right\}, \quad (\text{A.26})$$

est défini de manière unique d'après la densité de $D(S)$ dans H et le théorème de représentation de Riesz. Par extrapolation, pour tout $s \geq 0$, nous définissons également les opérateurs $S^{\frac{s}{2}}$ de domaine $D(S^{\frac{s}{2}})$

$$D(S^{\frac{s}{2}}) = \left\{ u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n \in H, \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \mu_n^s) |u_n|^2 < \infty \right\}. \quad (\text{A.27})$$

Les espaces extrapolés dépendent quant à eux du choix de S .

Annexe B

Théorèmes de régularité

Dans ce deuxième appendice, nous rappelons les résultats de densité dans les espaces de Sobolev et réunissons les résultats de régularité elliptique, de régularité globale et locale, utilisés dans l'analyse des équations de Helmholtz et de Maxwell.

B.1 Résultats de densité

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats de densité des espaces de fonctions infiniment différentiables dans les espaces de Sobolev, notamment pour simplifier les démonstrations effectuées dans la suite. Considérons Ω un domaine de \mathbb{R}^3 (borné ou non), simplement connexe, de frontière Γ lipschitzienne telle que Ω soit situé d'un seul côté de Γ . La figure B.1 illustre deux situations que nous interdisons, le cas d'une fracture du domaine ou d'un fil plongé dans le domaine. Ce premier résultat concerne la densité

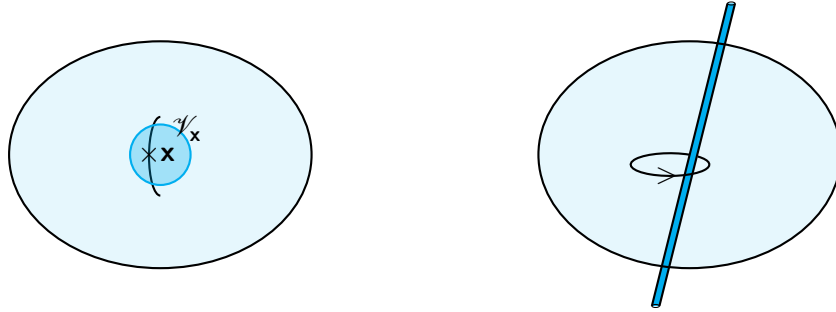


FIGURE B.1 – Domaine borné fissuré, domaine borné avec fil

des fonctions infiniment différentiables définies dans l'espace libre \mathbb{R}^3 dans les espaces de Sobolev. Sa démonstration repose sur les techniques de *troncature* et *régularisation*.

Théorème B.1. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^3)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [1, théorème 3.22]. □

Corollaire B.2. *Pour tout compact K de \mathbb{R}^3 , l'espace $\mathcal{C}^\infty(K)$ est dense dans $H_{\text{loc}}^m(\overset{\circ}{K})$, où $\overset{\circ}{K}$ désigne l'ouverture de K , pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Le résultat suivant caractérise les espaces de Sobolev, voir [1] [24] par exemple.

Théorème B.3. *L'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Les deux propositions suivantes sont des conséquences de la définition des espaces $H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ donnée dans la section 2.1.

Proposition B.4. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.*

Proposition B.5. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$.*

Enfin, notre étude nécessitera d'un argument de compacité entre les espaces de Sobolev $\mathbf{H}^m(\mathbf{rot}, \Omega)$, avec Ω borné, dont la définition est donnée dans (2.8b).

Proposition B.6. *Si Ω est borné, l'espace $\mathbf{H}^m(\mathbf{rot}, \Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. Nous démontrons ce résultat pour $m = 1$. Soit $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbf{H}^1(\mathbf{rot}, \Omega)$. La suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ alors nous pouvons en extraire une sous-suite $(\mathbf{u}_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement vers un certain \mathbf{u} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ car l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. De plus, $(\mathbf{rot} \mathbf{u}_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ donc nous pouvons en extraire une sous-suite $(\mathbf{u}_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge fortement vers un certain \mathbf{v} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par ailleurs, comme $(\mathbf{u}_{\varphi(n)})$ converge faiblement vers \mathbf{u} dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{u}_{\varphi(\psi(n))} &\rightharpoonup \mathbf{rot} \mathbf{u} && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{rot} \mathbf{u}_{\varphi(\psi(n))} &\longrightarrow \mathbf{v} && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, il suit que $\mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{v}$. □

B.2 Régularité elliptique locale

Ce premier théorème de régularité elliptique locale concerne les fonctions définies dans \mathbb{R}^3 tout entier.

Proposition B.7. *Si une fonction $u \in H_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^3)$ et son Laplacien $\Delta u \in H_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^3)$ alors $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\mathbb{R}^3)$ et*

$$\|u\|_{m+2, K'} \leq c_{K'} (\|u\|_{m, K} + \|\Delta u\|_{m, K}), \quad \forall K' \subset K \text{ compacts de } \mathbb{R}^3, \quad (\text{B.1})$$

tels que K' soit inclus dans l'ouverture de K .

Démonstration. Nous démontrons le résultat pour $m = 0$. Soit R un réel strictement positif et notons $\mathcal{B}_R \subset \mathcal{B}_{2R} \subset \mathbb{R}^3$ les boules de centre $\mathbf{0}$ et de rayon respectif R et $2R$. Puisque l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(K)$ est dense dans $L_{\text{loc}}^2(\overset{\circ}{K})$, pour tout compact K de \mathbb{R}^3 , il suffit de démontrer que

$$\|\nabla u\|_{0, \mathcal{B}_R} \leq c_R (\|u\|_{0, \mathcal{B}_{2R}} + \|\Delta u\|_{0, \mathcal{B}_{2R}}), \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et notons χ la fonction de troncature de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ dans \mathcal{B}_R et $\chi = 0$ hors de \mathcal{B}_{2R} . Alors, d'après la formule de Green (2.52) et en développant l'expression $\Delta(\chi u)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{0, \mathcal{B}_R}^2 &= \|\nabla(\chi u)\|_{0, \mathcal{B}_R}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\chi u)|^2 \, d\mathbf{x}, \\ &\leq - \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u} \left((\chi \Delta \chi) u + 2 \nabla \chi \cdot (\chi \nabla u) + \chi^2 \Delta u \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Or, nous avons l'identité $\chi \nabla u = \nabla(\chi u) - u \nabla \chi$, d'où

$$\|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathbb{R}^3}^2 \leq - \int_{\mathcal{B}_{2R}} \bar{u} \left(\underbrace{(\chi \Delta \chi - 2|\nabla \chi|^2)}_{\leq c_1} u + \underbrace{\chi^2}_{\leq 1} \Delta u + 2 \underbrace{\nabla \chi}_{\leq c_2} \cdot \nabla(\chi u) \right) d\mathbf{x}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$\|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathbb{R}^3}^2 \leq c_1 \|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}}^2 + \|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}} \|\Delta u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}} + 2c_2 \|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}} \|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathcal{B}_{2R}}.$$

Puisque χu est à support dans \mathcal{B}_{2R} , d'après l'inégalité de Young, il vient que

$$2c_2 \|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}} \|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathcal{B}_{2R}} \leq 2c_2^2 \|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathbb{R}^3}^2,$$

donc

$$\frac{1}{2} \|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathbb{R}^3}^2 \leq \left(c_1 + \frac{1}{2} + 2c_2^2 \right) \|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}}^2.$$

Par équivalence de norme, nous concluons que

$$\|\nabla(\chi u)\|_{0,\mathbb{R}^3} \leq c (\|u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}} + \|\Delta u\|_{0,\mathcal{B}_{2R}}),$$

d'où $\|\nabla u\|_{0,\mathcal{B}_R}$ est borné. Donc $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. \square

Dans la suite, D désigne un domaine borné de \mathbb{R}^3 , simplement connexe, de frontière Γ infiniment différentiable telle de D soit situé d'un seul côté de Γ et $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ l'ouverture de son complémentaire dans \mathbb{R}^3 . Nous supposons que Ω est connexe. Nous énonçons deux corollaires du théorème de régularité elliptique locale qui concernent les fonctions définies dans D ou dans Ω .

Corollaire B.8. *Si une fonction $u \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ et son Laplacien $\Delta u \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ alors $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$ et*

$$\|u\|_{m+2,K'} \leq c_{K'} (\|u\|_{m,K} + \|\Delta u\|_{m,K}), \quad \forall K' \subset K \text{ compacts de } \Omega, \quad (\text{B.2})$$

tels que K' soit inclus dans l'ouverture de K .

Corollaire B.9. *Si une fonction $u \in H^m(D)$ et son Laplacien $\Delta u \in H^m(D)$ alors $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(D)$ et*

$$\|u\|_{m+2,K} \leq c_K (\|u\|_{m,D} + \|\Delta u\|_{m,D}), \quad \forall K \text{ compact de } D. \quad (\text{B.3})$$

B.3 Résultats de régularité pour les équations de Maxwell

Ces deux résultats sont utilisés dans l'étude de la régularité des solutions des équations de Maxwell dans l'espace libre \mathbb{R}^3 .

Proposition B.10. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. La fonction \mathbf{u} appartient à $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si elle appartient à $\mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\text{rot}, \mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ tels que $\mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ et $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ dans \mathbb{R}^3 . Nous appliquons la transformée de Fourier $\hat{\cdot}$ sur les deux équations et nous obtenons

$$i\xi \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}} \text{ dans } \mathbb{R}^3, \quad i\xi \cdot \hat{\mathbf{u}} = \hat{g} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

Ensuite, nous décomposons $\hat{\mathbf{u}}$ en une partie normale et une partie tangentielle

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right) \frac{\xi}{|\xi|} + \left(\frac{\xi}{|\xi|} \times \hat{\mathbf{u}} \right) \times \frac{\xi}{|\xi|}$$

et d'après les expressions de $\hat{\mathbf{f}}$ et \hat{g} , nous obtenons

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{g} \frac{\xi}{i|\xi|^2} + \hat{\mathbf{f}} \times \frac{\xi}{i|\xi|^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\mathbb{R}^3} &= \|i|\xi|\hat{\mathbf{u}}\|_{0,\mathbb{R}^3} \leq \|\hat{g}\|_{0,\mathbb{R}^3} + \left\| \hat{\mathbf{f}} \times \frac{\xi}{|\xi|} \right\|_{0,\mathbb{R}^3}, \\ &\leq \|\hat{g}\|_{0,\mathbb{R}^3} + \|\hat{\mathbf{f}}\|_{0,\mathbb{R}^3}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$. □

Corollaire B.11. Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. La fonction \mathbf{u} appartient à $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si elle appartient à $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$.

Ce corollaire caractérise la régularité des solutions des équations de Maxwell dans l'espace libre dans les espaces de fonctions k -fois continûment différentiables.

Corollaire B.12. Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}(\mathbb{R}^3)$. Si sa divergence $\operatorname{div} \mathbf{u}$ appartient à $H^{k+1}(\mathbb{R}^3)$ et son rotationnel $\mathbf{rot} \mathbf{u}$ appartient à $\mathbf{H}^{k+1}(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3)$.

Démonstration. Avec un raisonnement analogue à la démonstration précédente, nous montrons que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+2}(\mathbb{R}^3)$. D'après le théorème d'injection 2.2, il vient que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3)$. □

Annexe C

Compléments sur l'équation de Helmholtz

Ce dernier appendice est destiné à justifier le caractère générateur des modes associés au problème de Maxwell qui consiste à chercher $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot})$ vérifiant

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.1})$$

à l'intérieur d'une boule, à l'extérieur d'une boule ou dans une couronne. Il s'agit de justifier les remarques 5.9, 5.10, 5.12 et 5.13. Dans toute la suite, nous adoptons les mêmes notations que dans les chapitres 4 et 5, à savoir : D désigne la boule de centre $\mathbf{0}$ et de rayon $R > 0$. Sa frontière Γ désigne la sphère de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R . Enfin, le domaine Ω désigne le complémentaire de \overline{D} dans \mathbb{R}^3 . Nous supposons de plus que

$$\Im(\kappa) > 0. \quad (\text{C.2})$$

C.1 Caractère bien posé du problème de Dirichlet dans des géométries sphériques

C.1.1 À l'intérieur d'une boule

Considérons le problème de Helmholtz homogène muni d'une condition de Dirichlet non-homogène

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = 0, & \text{dans } D, \\ u = Y_{n,m}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{C.3a})$$

$$u = Y_{n,m}, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{C.3b})$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq n$ sont deux entiers fixés. Ce problème est bien posé, cf. [41] et son unique solution est proportionnelle à

$$j_n(\kappa|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (\text{C.4})$$

Nous déduisons que

$$j_n(\kappa R) \neq 0, \quad (\text{C.5})$$

pour tous $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$.

C.1.2 À l'extérieur d'une boule

Considérons le problème extérieur de Helmholtz homogène muni d'une condition de Dirichlet non-homogène

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = Y_{n,m}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(C.6a)} \\ \text{(C.6b)} \end{matrix}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq n$ sont deux entiers fixés. Ce problème est bien posé, voir la section 3.1.2, et son unique solution est proportionnelle à

$$h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad \text{(C.7)}$$

Nous déduisons que

$$h_n^{(1)}(\kappa R) \neq 0, \quad \text{(C.8)}$$

pour tous $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$.

C.2 Caractère bien posé du problème de Fourier-Robin dans des géométries sphériques

C.2.1 À l'intérieur d'une boule

Considérons le problème de Helmholtz homogène muni d'une condition de Fourier-Robin non-homogène

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = 0, & \text{dans } D, \\ R \partial_r u + u = Y_{n,m}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(C.9a)} \\ \text{(C.9b)} \end{matrix}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq n$ sont deux entiers fixés.

Proposition C.1. *Il existe un unique $u \in H^1(D)$ vérifiant le problème de Helmholtz (C.9a)-(C.9b).*

Démonstration. Nous définissons la formulation variationnelle associée au problème de Helmholtz (C.9a)-(C.9b) qui consiste à chercher $u \in H^1(D)$ tel que

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_D u \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{R} \int_\Gamma u \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}} = \frac{1}{R} \int_\Gamma Y_{n,m} \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}}, \quad \forall \varphi \in H^1(D). \quad \text{(C.10)}$$

Première étape. Démontrons que le problème variationnel est bien posé. Il suffit de remarquer que la forme sesquilinéaire b définie par

$$b(u, \varphi) = \int_D \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_D u \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{R} \int_\Gamma u \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}} \quad \text{(C.11)}$$

est coercive sur $H^1(D)$. En effet, notant θ_κ l'argument du nombre complexe κ , pour tout

$u \in H^1(D)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |b(u, u)| &= \left| \exp \left(i \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\kappa \right) \right) b(u, u) \right|, \\
 &\geq \Re \left[\exp \left(i \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\kappa \right) \right) b(u, u) \right], \\
 &\geq \sin \theta_\kappa \int_D |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} - \Re \left[\kappa^2 \exp \left(i \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\kappa \right) \right) \right] \int_D |u|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{\sin \theta_\kappa}{R} \int_\Gamma |u|^2 \, ds_{\mathbf{x}}, \\
 &\geq \sin \theta_\kappa \left(\int_D |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + |\kappa|^2 \int_D |u|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{R} \int_\Gamma |u|^2 \, ds_{\mathbf{x}} \right), \\
 &\geq \sin \theta_\kappa \left(\int_D |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + |\kappa|^2 \int_D |u|^2 \, d\mathbf{x} \right), \\
 &\geq \min(1, |\kappa|^2) \sin \theta_\kappa \|u\|_{1,D}^2,
 \end{aligned}$$

donc, puisque $\theta_\kappa \in (0, \pi)$, b est coercive sur $H^1(D)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H^1(D)$ vérifiant la formulation variationnelle (C.10).

Seconde étape. Démontrons que la formulation variationnelle est équivalente au problème fort (C.9a)-(C.9b). D'une part, si $u \in H^1(D)$ vérifie le problème (C.9a)-(C.9b), alors $u \in H^2(D)$ et

$$\int_D -\Delta u \, \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_D u \, \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D}).$$

En appliquant la formule de Green (2.52) et en utilisant la condition aux limites vérifiée par u , nous obtenons

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_D u \, \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{R} \int_\Gamma u \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}} = \frac{1}{R} \int_\Gamma Y_{n,m} \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D}).$$

Enfin, comme $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ est dense dans $H^1(D)$ (cf. Théorème B.3), u vérifie la formulation variationnelle (C.10). D'autre part, supposons que $u \in H^1(D)$ vérifie la formulation variationnelle (C.10). En particulier, comme $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ est inclus dans $H^1(D)$, nous avons

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_D u \, \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D),$$

c'est-à-dire,

$$-\Delta u - \kappa^2 u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D).$$

Comme $-\Delta u = \kappa^2 u \in L^2(D)$, nous déduisons que $u \in H^2(D)$. Par ailleurs, comme $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ est inclus dans $H^1(D)$, nous avons

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} - \kappa^2 \int_D u \, \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{R} \int_\Gamma u \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}} = \frac{1}{R} \int_\Gamma Y_{n,m} \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D}).$$

En appliquant la formule de Green (2.52) et en utilisant l'équation vérifiée par u , puisque la dérivée normale de u coïncide avec sa dérivée radiale, il suit que

$$\int_\Gamma \partial_r u \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}} + \frac{1}{R} \int_\Gamma u \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}} = \frac{1}{R} \int_\Gamma Y_{n,m} \, \bar{\varphi} \, ds_{\mathbf{x}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma),$$

c'est-à-dire,

$$R\partial_r u + u = Y_{n,m} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Gamma).$$

Conclusion. Le problème fort (C.9a)-(C.9b) admet une unique solution. \square

Son unique solution est proportionnelle à

$$j_n(\kappa|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (\text{C.12})$$

Nous déduisons que

$$j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R) \neq 0, \quad (\text{C.13})$$

pour tous $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$.

C.2.2 À l'extérieur d'une boule

Considérons le problème extérieur de Helmholtz homogène muni d'une condition de Fourier-Robin non-homogène

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ R \partial_r u + u = Y_{n,m}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{C.14a})$$

$$(\text{C.14b})$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq n$ sont deux entiers fixés. Avec un raisonnement analogue au paragraphe précédent, il est possible de démontrer que ce problème est bien posé. Par ailleurs, son unique solution est proportionnelle à

$$h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|)Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (\text{C.15})$$

Nous déduisons que

$$h_n^{(1)}(\kappa R) + \kappa R h_n^{(1)'}(\kappa R) \neq 0, \quad (\text{C.16})$$

pour tous $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\kappa) > 0$ et $R > 0$.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams and J. J. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic press, 2003.
- [2] S. Agmon and L. Hörmander. Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics. *Journal d'Analyse Mathématique*, 30(1) :1–38, 1976.
- [3] H. Ammari and H. Kang. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. Lecture notes in mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [4] H. Ammari and C. Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(4) :673–692, 1999.
- [5] H. Ammari, S. Moskow, and M. S. Vogelius. Boundary integral formulae for the reconstruction of electric and electromagnetic inhomogeneities of small volume. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :49–66, 2003.
- [6] H. Ammari, M. S. Vogelius, and D. Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter ii. the full maxwell equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 80(8) :769 – 814, 2001.
- [7] H. Ammari and D. Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the eigenfrequencies of the full maxwell equations due to the presence of imperfections of small diameter. *Asymptotic Analysis*, 30(4) :331–350, 2002.
- [8] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9) :823–864, 1998.
- [9] A. Bendali, P.-H. Cocquet, and S. Tordeux. Scattering of a scalar time-harmonic wave by n small spheres by the method of matched asymptotic expansions. *Numerical Analysis and Applications*, 5(2) :116–123, 2012.
- [10] A. Bendali, P.-H. Cocquet, and S. Tordeux. Approximation by multipoles of the multiple acoustic scattering by small obstacles and application to the foldy theory of isotropic scattering. 2014.
- [11] A. Bendali, P.-H. Cocquet, and S. Tordeux. Approximation by multipoles of the multiple acoustic scattering by small obstacles in three dimensions and application to the foldy theory of isotropic scattering. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 219(3) :1017–1059, 2016.

-
- [12] S. Bochner. Vector fields and ricci curvature. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52(9) :776–797, 1946.
 - [13] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. 1983.
 - [14] G. Caloz, M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. On the influence of the geometry on skin effect in electromagnetism. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9–12) :1053 – 1068, 2011.
 - [15] G. Caloz, M. Dauge, and V. Péron. Uniform estimates for transmission problems with high contrast in heat conduction and electromagnetism. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 370(2) :555 – 572, 2010.
 - [16] M. Cassier and C. Hazard. Multiple scattering of acoustic waves by small sound-soft obstacles in two dimensions : mathematical justification of the Foldy-Lax model. *Wave Motion*, 50(1) :18–28, 2013.
 - [17] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [18] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3) :627–649, 1999.
 - [19] M. Dauge, S. Tordeux, and G. Vial. Selfsimilar perturbation near a corner : Matching and Multiscale expansions. working paper or preprint, Jan. 2007.
 - [20] A. de La Bourdonnaye. Décomposition de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ et nature de l’opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l’électromagnétisme. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 316(4) :369–372, 1993.
 - [21] G. de Rham. *Variétés différentiables : formes, courants, formes harmoniques*. Number no s 1218 à 1223 in Publications de l’Institut mathématique de l’université de Nancago. Hermann, 1955.
 - [22] M. Duruflé, V. Péron, and C. Poinard. Time-harmonic Maxwell equations in biological cells. The differential form formalism to treat the thin layer. *Confluentes Mathematici*, 3(2) :325–357, 2011. voir aussi <http://hal.inria.fr/inria-00347971/fr/>.
 - [23] L. L. Foldy. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, 67(3-4) :107, 1945.
 - [24] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [25] P. W. Gross and P. R. Kotiuga. *Electromagnetic theory and computation : a topological approach*, volume 48. Cambridge University Press, 2004.
 - [26] N. A. Gumerov and R. Duraiswami. *Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions*. Elsevier, 2005.
 - [27] R. Hiptmair, P. R. Kotiuga, and S. Tordeux. Self-adjoint curl operators. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 191(3) :431–457, 2012.
 - [28] W. V. D. Hodge. *The theory and applications of harmonic integrals*. CUP Archive, 1989.

-
- [29] D. Huet. *Décomposition spectrale et opérateurs*. Le Mathématicien. Presses Universitaires de France, 1976.
 - [30] A. Il'in. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*. American Mathematical Soc.
 - [31] P. Joly. *Introduction à l'analyse mathématique de la propagation d'ondes en régime harmonique*. Université de Pierre et Marie Curie, Département de Mathématiques appliquées, 2007.
 - [32] W. Knauff and R. Kress. On the exterior boundary-value problem for the time-harmonic maxwell equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 72(1) :215–235, 1979.
 - [33] B. G. Korenev. *Bessel functions and their applications*. CRC Press, 2003.
 - [34] M. Lax. Multiple scattering of waves. *Reviews of Modern Physics*, 23(4) :287, 1951.
 - [35] M. Lax. Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems. *Physical Review*, 85(4) :621, 1952.
 - [36] F. Le Loüer. *Optimisation de forme d'antennes lentilles intégrées aux ondes millimétriques*. Theses, Université Européenne de Bretagne, Oct. 2009.
 - [37] J. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Number vol. 1 in Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, 1968.
 - [38] V. Mattesi. *Propagation des ondes dans un domaine comportant des petites hétérogénéités : modélisation asymptotique et calcul numérique*. PhD thesis, Pau, 2014.
 - [39] V. Maz'ya, S. Nazarov, and B. Plamenevskij. *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains*. Number vol. 1 in Operator Theory : Advances and Applications. Birkhäuser Basel, 2012.
 - [40] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, 2003.
 - [41] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer Science & Business Media, 2001.
 - [42] J. E. Ospino. Electromagnetic transmission problems with a large parameter in weighted sobolev spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013(248) :1–19, 2013.
 - [43] L. Paquet. Problèmes mixtes pour le système de maxwell. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, volume 4, pages 103–141, 1982.
 - [44] V. Péron. *Mathematical modeling of electromagnetic phenomena in high contrast media*. Theses, Université Rennes 1, Sept. 2009.
 - [45] V. Péron, K. Schmidt, and M. Duruflé. Equivalent transmission conditions for the time-harmonic Maxwell equations in 3D for a medium with a highly conductive thin sheet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76(3) :1031–1052, 2016.
 - [46] E. R. Pike and P. C. Sabatier. *Scattering, Two-Volume Set : Scattering and inverse scattering in Pure and Applied Science*. Academic press, 2001.

- [47] M. Schechter. *Principles of functional analysis*, volume 2. Academic press New York, 1971.
- [48] L. Schwartz. Théorie des distributions, hermann, 1966. *Zentralblatt MATH*, 962, 1990.
- [49] R. A. Silverman et al. *Special functions and their applications*. Courier Corporation, 1972.
- [50] D. Spencer and A. M. Society. *Partial Differential Equations*. Proceedings of symposia in pure mathematics. American Mathematical Society, 1973.
- [51] S. Tordeux. *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes*. Theses, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, Dec. 2004.
- [52] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, 2003. Thèse de doctorat dirigée par Caloz, Gabriel Mathématiques Rennes 1 2003.
- [53] H. Weyl. On Hodge's theory of harmonic integrals. *Annals of Mathematics*, pages 1–6, 1943.